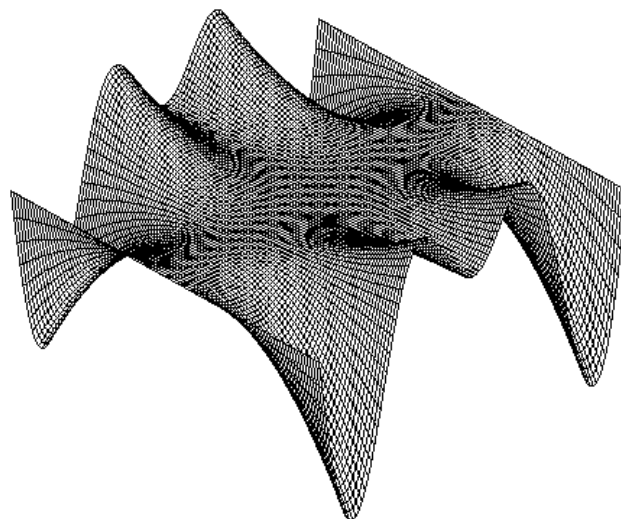


**Buku Pelengkap**

# **FISIKA MATEMATIKA**

**Edisi I**



**Dr. Husin Alatas**

**Bagian Fisika Teori**

**Departemen Fisika**

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

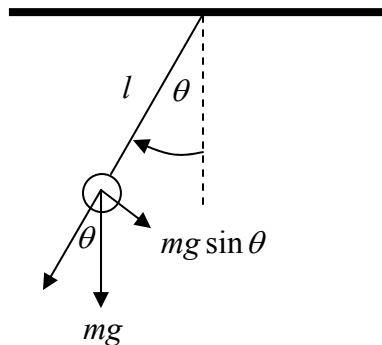
**Institut Pertanian Bogor**

## BAB 1

### DERET TAK-HINGGA, DERET PANGKAT DAN URAIAN TAYLOR

#### 1. Pendahuluan

Pada bab ini akan dibahas mengenai pengertian deret dan aplikasinya dalam Fisika. Dalam banyak fenomena fisis, penggunaan deret diperlukan untuk memperoleh hasil kuantitatif yang bersifat hampiran ketika memecahkan persoalan yang cukup rumit secara matematis. Contoh yang paling sederhana yang biasa kita jumpai dalam persoalan Fisika dasar adalah persoalan bandul sederhana yang disimpangkan dan akan mengalami gerak periodik ketika dilepaskan akibat gaya gravitasi yang bertindak sebagai gaya pemulih seperti yang diperlihatkan pada gambar 1 untuk bandul bermassa  $m$  dengan panjang tali  $l$ .



Gambar 1.

Berdasarkan hukum kedua Newton, penggambaran dinamika gerak bandul dengan massa  $m$  tersebut diberikan oleh persamaan diferensial berikut:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (1)$$

Secara matematik, persamaan (1) di atas relatif sulit untuk dipecahkan akibat kehadiran fungsi sinusoidal  $\sin\theta$ . Untuk melakukan penyederhanaan persoalan tersebut, langkah yang dapat ditempuh adalah dengan melakukan hampiran terhadap fungsi sinusoidal tersebut melalui uraian deret pangkat sebagai berikut:

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 + \dots \quad (2)$$

Terlihat dari hasil hampiran tersebut bahwa untuk kasus dengan  $\theta \ll 1$ , suku-suku dengan pangkat yang lebih dari 1 memiliki harga yang sangat kecil, sehingga fungsi sinus tersebut dapat dihampiri menjadi  $\sin \theta \approx \theta$ . Dengan demikian, persamaan (1) untuk kasus dengan  $\theta \ll 1$  dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \quad (3)$$

yang secara matematis jauh lebih sederhana untuk dipecahkan.

Perlu ditekankan disini, bahwa gambaran dinamika yang diberikan oleh persamaan (3) hanya berlaku untuk sudut simpangan yang relatif sangat kecil dan tidak menggambarkan dinamika yang sebenarnya bagi gerak bandul dengan simpangan yang relatif cukup besar.

## 2. Deret

Dari contoh pada bagian pendahuluan di atas, secara umum dapat disimpulkan bahwa penguraian suatu fungsi ke dalam bentuk deret pangkat:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4)$$

dapat membantu kita untuk menyederhanakan suatu model matematik yang relatif sulit untuk dipecahkan. Walau sejak dini harus kita sadari bahwa uraian tersebut umumnya tidak berlaku untuk semua interval  $x$ , tapi setidaknya akan memberikan jawaban sebagian atas fenomena yang kita amati. Secara umum, penggunaan deret dalam Fisika seringkali dibutuhkan ketika memecahkan problem-problem yang ada.

Sebelum kita membahas secara lebih spesifik mengenai deret pangkat yang diberikan oleh persamaan (4), akan ditinjau terlebih dahulu pengertian deret secara umum. Deret pada dasarnya adalah penjumlahan suatu barisan bilangan yang memiliki keteraturan tertentu, secara simbolik deret dapat ditulis sebagai  $\sum a_n$ , dengan  $\Sigma$  menyatakan penjumlahan dan  $a_n$  adalah barisan yang terkait. Sebagai contoh deret selain deret pangkat (4) misalnya adalah:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots \quad (5a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} bx^{n-1} = b + bx + bx^2 + \dots, \quad (5b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{9x} \dots \quad (5c)$$

dengan  $n$  adalah bilangan bulat,  $x$  merupakan variabel yang dapat berharga berapa saja dan  $b$  adalah sebuah bilangan konstan sebarang. Ungkapan  $n$ ,  $bx^{n-1}$  dan  $(-1)^n/n^2x$  adalah barisan  $a_n$  yang dimaksud. Sehingga jelas diperlihatkan adanya keteraturan tertentu dalam barisan yang terdapat dalam deret tersebut. Perhatikan pula bahwa tanda dalam deret tersebut dapat positif/negatif semua atau memiliki tanda yang berganti-ganti untuk setiap barisannya dan lazim disebut sebagai *deret bolak-balik*. Jika pada deret tersebut terdapat tak-hingga buah barisan maka dikatakan deret tersebut adalah *deret tak-hingga*. Secara spesifik contoh pada persamaan (5b) tidak lain adalah *deret geometri* atau *deret ukur*.

### 3. Uji Konvergensi Deret

Pertanyaan yang muncul sekarang adalah apakah deret tak-hingga tersebut akan menuju ke suatu jumlah tertentu (*konvergen*) atau tidak (*divergen*). Misalkan  $S_n = \sum_m^n a_m$  adalah jumlah  $n$  buah barisan, maka deret tersebut dikatakan konvergen jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  dengan  $S < \infty$  atau dengan kata lain  $S$  berhingga dan dikatakan divergen jika  $S \rightarrow \infty$ . Untuk memeriksa apakah suatu deret konvergen atau divergen dapat dilakukan dengan menggunakan sejumlah perangkat uji. Suatu deret belum tentu dapat diperiksa konvergensinya menggunakan semua perangkat-perangkat yang nanti akan dibahas. Bisa saja deret tersebut hanya dapat diuji konvergensinya hanya dengan satu perangkat pemeriksa.

#### 3.1. Uji Awal

Pemeriksaan pertama kekonvergenan adalah dengan melakukan *uji awal* yaitu dengan memeriksa apakah untuk barisan yang ke tak-hingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Jika hal ini tidak terpenuhi maka segera dapat kita simpulkan bahwa deret tersebut divergen. Jika ternyata hal tersebut dipenuhi, maka *ada kemungkinan* deret tersebut konvergen, dan

pemeriksaan lebih lanjut harus dilakukan untuk mendapat kepastiannya.. Jelas, uji ini bukan untuk mengetahui suatu deret konvergen atau tidak, tetapi lebih diperuntukkan sebagai langkah awal paling sederhana untuk menghemat waktu, karena jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  maka dengan segera kita dapat simpulkan bahwa deret tersebut divergen.

*Contoh 1.1.* Deret  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  merupakan deret tak-hingga yang divergen karena jelas

terlihat bahwa  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ , sedangkan untuk deret tak-hingga  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  memiliki

kemungkinan konvergen karena  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

### 3.2. Uji Konvergensi Deret Positif

Setelah kita melakukan uji awal dan misalkan deret yang ditinjau memenuhi kondisi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , maka beberapa perangkat pemeriksaan selanjutnya untuk mengetahui konvergensinya. Untuk pembahasan berikut ini, kita akan membatasi diri pada kasus dengan deret yang memiliki tanda positif untuk semua barisannya (deret positif). Pengujian deret bolak-balik akan dibahas secara terpisah.

#### 3.2.1. Uji Banding

Uji ini dimaksudkan untuk menguji konvergensi dan divergensi. Untuk memeriksa deret yang ditinjau, kita membutuhkan suatu deret lain yang sudah diketahui konvergensinya dan juga deret lain yang sudah diketahui divergensinya, dan kemudian dilakukan perbandingan apakah deret yang kita tinjau misal  $\sum a_n$  dengan deret yang telah kita ketahui konvergensinya  $\sum b_n$  dan jika memenuhi kondisi  $a_n < b_n$  untuk semua  $n \geq N$ , maka deret tersebut konvergen. Sedangkan untuk deret lainnya yang telah diketahui divergen misalnya  $\sum d_n$ , jika memenuhi kondisi  $a_n > d_n$  untuk semua  $n \geq N$ , maka deret  $\sum a_n$  tersebut divergen.

Sebagai deret pembanding dapat digunakan deret geometri yang diberikan oleh persamaan (5b). Deret ini tidak divergen untuk  $x < 1$  dan dapat dibuktikan dengan mudah

melalui ungkapan  $\sum_{n=0}^{\infty} bx^n(1-x)$  bahwa deret tersebut konvergen ke jumlah (buktikan!):

$$\sum_{n=0}^{\infty} bx^n = \frac{b}{1-x} \quad (6)$$

*Contoh 1.2.* Tinjau konvergensi deret berikut: (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  dan (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . dengan  $n! = n(n-1)(n-2)\dots$ . Misalkan untuk persamaan (6) kita gunakan  $b=1$  dan  $x=1/2$ , sehingga deret yang menjadi pembandingnya adalah  $\sum \frac{1}{2^n}$ . Sebagaimana terlihat dari perbandingan dalam tabel berikut:

$n$	$n^{-1}$	$(n!)^{-1}$	$2^{-n}$
1	1	1	1/2
2	1/2	1/2	1/4
3	1/3	1/6	1/8
4	1/4	1/24	1/16
5	1/5	1/120	1/32

jelas terlihat bahwa untuk deret (i) selalu berlaku  $\frac{1}{n} > \frac{1}{2^n}$  untuk seluruh  $n$  sehingga dengan demikian deret tersebut divergen berdasarkan uji ini. Sedangkan untuk deret (ii) terlihat bahwa untuk  $n \geq 4$  selalu terpenuhi kondisi  $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$ , sehingga dengan demikian deret (ii) konvergen. Perlu dicatat bahwa pemeriksaan dengan menggunakan uji banding ini tidak selalu memberikan hasil yang sebenarnya mengenai konvergensi suatu deret, hal ini dikarenakan pada uji ini hasil yang diperoleh bergantung pada pemilihan deret pembanding yang konvergen.

### 3.2.2. Uji Integral

Dalam uji integral ini, yang dilakukan adalah dengan melakukan integrasi secara kontinu terhadap  $n$  dimana  $\sum_n a_n \rightarrow \int a_n dn$ . Jika hasil integrasi deret yang ditinjau tersebut terbatas, maka deret tersebut konvergen. Sebaliknya jika hasilnya tak-hingga maka deret tersebut divergen.

*Contoh 1.3.* Tinjau deret  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  dengan  $p > 0$  (secara khusus deret ini disebut juga deret  $p$ -harmonik). Integrasikan deret tersebut terhadap  $n$ :

$$\int_C \frac{1}{n^p} dn = \begin{cases} \frac{C^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \\ \infty, & p = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Perlu dicatat bahwa batas integrasi bagian bawah pada persamaan (7) adalah  $C$  yang harganya tidak harus selalu sama dengan nol. Hal ini dimaksudkan untuk menghindari kemungkinan kontribusi dari batas tersebut berharga tak-hingga. Dapat dibuktikan bahwa berdasarkan uji banding untuk deret  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  dengan deret pembanding  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  akan mengindikasikan deret yang divergen. Tetapi berdasarkan uji integral deret tersebut adalah konvergen (*which one is correct?!*)

### 3.2.3. Uji Rasio

Tinjau deret  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  dan misalkan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = C$ , maka:

- (a) Deret konvergen jika  $C < 1$
- (b) Deret divergen jika  $C > 1$
- (c) Pengujian tidak dapat menentukan konvergen atau divergen jika  $C = 1$

*Contoh 1.4.* Tinjau  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  dengan  $a_n = \frac{1}{n!}$  dan  $a_{n+1} = \frac{1}{n!(n+1)}$ , maka

berdasarkan uji rasio diperoleh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ . Sehingga dengan

demikian berdasarkan uji rasio ini deret tersebut juga konvergen, sebagaimana yang diperoleh pada contoh bagian 3.2.1.

#### 3.2.4. Uji Banding Limit

Seperti halnya uji banding 3.2.1, pada uji ini juga terbagi atas uji konvergensi dan uji divergensi. Jika  $\sum a_n$  adalah deret yang ingin diuji konvergensi dan terdapat deret lain:

- $\sum b_n$  yang telah diketahui konvergen dan jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$ , dengan  $C \in [0, \infty)$ , maka deret tersebut konvergen.
- $\sum d_n$  yang diketahui divergen dan jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{d_n} = C, C \in [1, \infty)$ , maka deret tersebut divergen. Untuk selang  $C \in (0, 1)$  sebaiknya lakukan uji lain karena mungkin saja deret tersebut konvergen.

*Contoh 1.5.* Tinjau konvergensi dari deret  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(n+1)^2}$ . Sebagai pembanding kita gunakan deret  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  yang diketahui divergen. Pemilihan ini dilakukan juga dengan

menimbang bahwa untuk nilai  $n$  yang besar berlaku  $\frac{3n+1}{(n+1)^2} \sim \frac{3}{n}$ . Dari sini diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{(n+1)^2} \times n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} = 3 > 0, \text{ sehingga deret tersebut divergen.}$$

Sebagai catatan akhir, dalam pengujian konvergensi suatu deret seringkali dibutuhkan pengujian dengan menggunakan lebih dari satu perangkat pemeriksaan. Misalkan dengan cara uji banding kita memperoleh bahwa deret yang ditinjau divergen sedangkan dengan menggunakan uji awal mengindikasikan kemungkinan konvergen, maka kita patut curiga bahwa perangkat tersebut tidak memberikan jawaban yang tepat, sehingga harus dilakukan pengujian dengan menggunakan perangkat lainnya. Secara umum dapat dikatakan bahwa uji integral dan uji rasio memberikan hasil yang lebih dapat dipercaya ketimbang uji banding, mengingat pemilihan deret pembanding sangat menentukan dalam proses pengujian.



### 3.3. Uji Konvergensi Deret Bolak-Balik

Sebagaimana telah diberikan pada persamaan (5c), deret bolak-balik merupakan penjumlahan barisan yang memiliki tanda yang berubah-ubah dari positif dan negatif. Untuk memeriksa kekonvergenan dari deret seperti itu, kondisi yang akan dipenuhi jika deret tersebut konvergen adalah sebagai berikut:

- a.  $|a_{n+1}| < |a_n|$  dengan  $|a_n|$  dan  $|a_{n+1}|$  adalah nilai mutlak barisan.
- b.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ .

*Contoh 1.6.* Tinjau deret pada persamaan (5c) dengan menetapkan  $x = 1$ . Terlihat dengan mudah bahwa  $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$  dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ , sehingga dengan demikian deret tersebut konvergen.

### 3.4. Konvergensi Mutlak

Misalkan deret  $\sum a_n$  merupakan deret bolak-balik, maka berlaku teorema berikut: jika deret mutlaknya  $\sum |a_n|$  merupakan sebuah deret yang konvergen maka  $\sum a_n$  juga konvergen. Tetapi tidak berlaku sebaliknya, jika  $\sum a_n$  konvergen maka belum tentu  $\sum |a_n|$  konvergen. Jika sebuah deret bolak-balik konvergen dan juga deret mutlak yang terkait dengannya konvergen maka deret tersebut dikatakan memiliki *Konvergensi Mutlak*. Sedangkan jika deret bolak-balik tersebut konvergen sementara deret mutlaknya divergen maka deret tersebut dikatakan memiliki *konvergensi bersyarat*.

### 3.5. Rentang Konvergensi

Untuk deret-deret yang mengandung variabel bebas  $\sum a_n(x)$ , seperti yang dicontohkan pada persamaan (5b), langkah selanjutnya yang harus dilakukan adalah memeriksa pada rentang  $x$  dimana deret tersebut konvergen. Untuk mengetahui rentang tersebut, kita dapat menggunakan uji rasio yang telah dibahas pada bagian 3.2.3, yakni dengan meninjau kondisi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| < 1$  dan akan diperoleh empat kemungkinan rentang  $x$  yaitu: (a)  $x = 0$ , (b)  $-C < x < C$ , (c)  $-C > x$  dan  $x > C$ , atau (c)  $-\infty < x < \infty$ .

*Contoh 1.7.* Tinjau deret  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}$ . Dari uji rasio diperoleh:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{x^{n+1}} \right|$

diperoleh  $|1/x| < 1$  atau  $|x| > 1$ , sehingga dengan demikian rentang konvergensi deret tersebut adalah  $x < -1$  dan  $x > 1$ . Perhatikan bahwa rentang ini tidak mengikut sertakan nilai-nilai ujung  $x = -1$  dan  $x = 1$ . Untuk menguji konvergensi di titik-titik tersebut harus dilakukan dengan menggunakan uji yang lain dan ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

#### 4. Deret Pangkat dan Uraian Taylor

Seperti telah disinggung pada bagian pendahuluan, dalam memecahkan banyak persoalan Fisika harus diselesaikan dengan melakukan hampiran agar diperoleh suatu model matematika yang secara teknis lebih mudah dipecahkan. Walau dalam banyak hal kita akan kehilangan generalitas perilaku sistem yang ditinjau, akan tetapi cara ini sedikit banyak dapat membantu kita memahami perilaku sistem dalam suatu rentang tertentu.

Salah satu hampiran yang luas digunakan dalam Fisika adalah dengan menguraikan suatu fungsi dengan menggunakan basis deret pangkat sebagaimana yang diberikan pada persamaan (4). Secara spesifik, penguraian suatu fungsi dengan basis polinom  $x^n$  dikenal dengan nama uraian Taylor.

Dalam menguraikan suatu fungsi dalam deret pangkat tersebut harus diperhatikan pula rentang nilai  $x$  yang membuat uraian tersebut konvergen. Untuk memperoleh rentang tersebut dapat digunakan perangkat uji rasio yang telah dibahas pada bagian 3.2.3. Sebelum kita memposisikan diri untuk mencari rentang konvergensi, terlebih dahulu akan kita bahas mengenai uraian Taylor berbasiskan deret pangkat.

Tinjau kembali persamaan (4) yang lebih diperluas sebagai berikut:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad (8)$$

dengan  $c$  adalah suatu konstan yang berharga sebarang. Selanjutnya kita akan menentukan koefisien-koefisien  $a_n$ . Terlihat dengan mengambil  $x = c$ , akan diperoleh:

$$a_0 = f(c) \quad (9)$$

Selanjutnya untuk menentukan koefisien  $a_1$ , diferensiasikan persamaan (8) dan evaluasi di titik  $x = c$  sehingga diperoleh:

$$a_1 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=c} \quad (10)$$

Mudah ditebak, bahwa untuk mendapat koefisien  $a_2$  dilakukan dengan mendiferensiasikan dua kali persamaan (8):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= (2 \times 1)a_2 + (3 \times 2 \times 1)a_3(x-c) + \dots \\ &= 2!a_2 + 3!a_3(x-c) + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

dan kembali mengevaluasinya di titik  $x = c$ :

$$a_2 = \left. \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=c} \quad (12)$$

Untuk koefisien  $a_n$  dengan cara yang serupa diperoleh:

$$a_n = \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=c} \quad (13)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh uraian fungsi  $f(x)$  dengan basis fungsi polinom  $(x-c)^n$  sebagai berikut:

$$f(x) = f(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=c} (x-c)^n \quad (14)$$

Secara spesifik, uraian yang diberikan oleh persamaan (14) dinamakan sebagai uraian Taylor, sedang khusus untuk kasus dengan  $c = 0$  dinamakan uraian MacLaurin. Uraian Taylor memiliki peranan yang dapat dikatakan sangat sentral dalam Fisika dan saudara harus meyakini diri telah memahami secara baik konsep uraian tersebut.

*Contoh 1.8.* Uraikan fungsi  $f(x) = \sin x$  dalam uraian Taylor dan tentukan rentang konvergensinya. Dengan mengambil  $c = 0$  diperoleh:

$$a_0 = \sin x \Big|_{x=0} = 0 \quad (15a)$$

$$a_1 = \left. \frac{d(\sin x)}{dx} \right|_{x=0} = \cos x \Big|_{x=0} = 1 \quad (15b)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2(\sin x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2} \sin x \Big|_{x=0} = 0 \quad (15c)$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \frac{d^3(\sin x)}{dx^3} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{6} \cos x \Big|_{x=0} = -\frac{1}{6} \quad (15d)$$

dan seterusnya sehingga didapatkan:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \quad (16)$$

Uraian di atas dapat diartikan sebagai uraian Taylor untuk  $f(x) = \sin x$  di sekitar titik  $x = 0$ . Langkah selanjutnya adalah menentukan rentang kekonvergenan uraian Taylor (16) dengan memanfaatkan uji rasio. Karena deret pada persamaan (16) merupakan deret dengan koefisien yang terdiri atas positif dan negatif, maka yang akan kita tinjau adalah uji rasio bagi konvergensi mutlak deret tersebut. Untuk itu, terlebih dahulu kita nyatakan persamaan (16) dalam bentuk:

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{(2n-1)} \quad (17)$$

Kemudian berdasarkan uji rasio diperoleh:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \div \frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{2n(2n+1)} \right| = 0 < 1 \end{aligned} \quad (18)$$

Karena limit di atas berharga nol untuk semua  $x$  maka uraian Taylor untuk  $f(x) = \sin x$  memiliki rentang konvergensi  $-\infty < x < \infty$  atau dengan kata lain berlaku untuk seluruh harga  $x$ .

*Contoh 1.9.* Jika pada contoh 1.8 untuk fungsi sinus kita dapat menguraikannya dalam dengan mengambil  $x = 0$ , ternyata hal ini tidak berlaku umum untuk semua fungsi. Sebagai contoh adalah fungsi  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Dengan mengambil uraian Taylor di sekitar titik  $x = 0$  segera akan kita dapatkan bahwa untuk koefisien  $a_1$  saja yang diperoleh adalah:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left. \frac{d(1/x)}{d_x} \right|_{x=0} \\
&= - \left. \frac{1}{x^2} \right|_{x=0} \\
&= \infty
\end{aligned}
\tag{19}$$

Sehingga dengan demikian jelas kita tidak dapat menguraikan fungsi tersebut dengan mengambil  $c = 0$ . Untuk kasus ini, kita dapat mengambil nilai  $x$  di titik lain misalnya di  $x = 1$ , sehingga kita peroleh uraiannya sebagai berikut (buktikan!):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots \\
&= \sum (-1)^{n+1} (x-1)^{n-1}
\end{aligned}
\tag{20}$$

Dengan menggunakan kembali uji rasio diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^n}{(x-1)^{n-1}} \right| \\
&= |x-1| < 1
\end{aligned}
\tag{21}$$

Sehingga diperoleh rentang kekonvergenannya adalah  $-1 < x-1 < 1$  atau  $0 < x < 2$ . Ingat bahwa titik-titik ujung  $x = 0$  dan  $x = 2$  tidak disertakan.

Sebagai sebuah tambahan, penting untuk diketahui syarat lain yang harus dipenuhi agar suatu fungsi dapat dinyatakan dalam uraian Taylor yakni syarat *konvergensi seragam*. Secara ungkapan matematika yang ketat, syarat ini dapat dinyatakan

sebagai berikut: “Misal  $S_n(x) = \sum_{m=1}^n a_m(x)$  dan  $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n a_m(x)$  yang konvergen

dalam suatu rentang terbuka  $x \in (C_1, C_2)$ , maka jika terdapat suatu nilai  $\varepsilon$  sedemikian sehingga  $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$  berlaku untuk semua  $n > N$  dan  $N$  tidak bergantung pada  $x$  dalam rentang tersebut, maka dikatakan deret tersebut konvergen seragam pada rentang tersebut.

Berdasarkan kondisi konvergensi seragam ini, keuntungan yang diperoleh dari uraian Taylor berbasiskan deret pangkat ini adalah adanya kemudahan dalam hal mendiferensiasi dan mengintegrasikannya, yang dapat dilakukan suku per suku.

Dalam beberapa hal, kita mungkin saja menjumpai bentuk fungsi-fungsi yang relatif cukup sulit untuk diuraikan dalam bentuk uraian Taylor. Untuk itu kita dapat memanfaatkan fungsi-fungsi yang sudah diketahui terlebih dahulu uraian dan selang konvergensinya. Misalkan sebuah fungsi  $f(x) = u(x)w(x)$  dengan selang konvergensi masing-masing adalah  $C_u$  dan  $C_w$ , maka uraian Taylor untuk  $f(x)$  di sekitar titik  $x = c$  diberikan oleh:

$$f(x) = \left( u(c) + \frac{du}{dx}(x-c) + \dots \right) \left( w(c) + \frac{dw}{dx}(x-c) + \dots \right) \quad (22)$$

dengan rentang konvergensi uraian tersebut merupakan irisan dari rentang masing-masing uraian  $C_u \cap C_w$ .

*Contoh 1.10.* Tinjau fungsi  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  yang kerap dijumpai dalam persoalan gelombang. Berdasarkan pengetahuan kita tentang uraian Taylor untuk  $f(x) = \sin x$  di sekitar titik  $x = 0$  yang diberikan oleh persamaan (16) maka uraian fungsi tersebut adalah:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \quad (22)$$

Dalam contoh ini kita tidak perlu uraian Taylor untuk fungsi  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Untuk menentukan rentang konvergensinya, telah kita peroleh sebelumnya bahwa uraian  $\sin x$  di sekitar  $x = 0$  memiliki rentang  $-\infty < x < \infty$ , sedangkan untuk  $f(x) = \frac{1}{x}$  rentang definisinya (bukan rentang konvergensi!) adalah  $\{-\infty < x < \infty, x \neq 0\}$  sehingga irisan dari kedua rentang adalah  $\{-\infty < x < \infty, x \neq 0\}$ .

## 5. Contoh Penerapan dalam Fisika

### 5.1. Hampiran Numerik

Menggunakan uraian Taylor kita dapat mencari hampiran dari suatu fungsi  $f(x)$  dengan melakukan pemangkasan orde dari uraian tersebut sesuai dengan yang kita kehendaki. Misalnya kita melakukan pemangkasan hingga orde ke  $n$ , maka derajat ketelitian yang kita peroleh dapat didekati melalui formula:

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \left( f(c) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \frac{d^m f}{dx^m} \Big|_{x=c} (x-c)^m \right) \right| \quad (23)$$

$$\approx \left| \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} \Big|_{x=d} (x-c)^{n+1} \right|$$

Dengan  $d$  adalah titik di antara  $c$  dengan nilai  $x$  yang ingin dihampiri.

*Contoh 1.10.* Fungsi semacam  $f(x) = \frac{1}{x}$  kerap kali ditemukan penerapannya dalam problem Fisika terkait dengan potensial listrik Coulomb. Uraian fungsi tersebut pada persamaan (2) dapat kita artikan bahwa nilai fungsi tersebut di sekitar titik  $x = 1$  dengan rentang  $0 < x < 2$  dapat dihampiri dengan keakurasian yang cukup baik akibat kekonvergensianya pada rentang tersebut. Untuk memperkirakan harga fungsi tersebut disekitar  $x = 1,01$  misalnya, kita dapat melakukan pemangkasan deret pada persamaan (20) hingga pangkat yang rendah saja, misalnya sampai dengan orde 2,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1,01} &= 1 - (1,01 - 1) + (1,01 - 1)^2 \\ &= 0,9901 \end{aligned} \quad (24)$$

Berdasarkan pendekatan (23) derajat ketelitiannya dapat dihitung melalui hubungan berikut:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{3!} \frac{d^3 (1/x)}{dx^3} \Big|_{x=d} (x-c)^3 \right| \quad (25)$$

$$= \frac{1}{d^4} (x-1)^3$$

Ambil misalnya  $d = 1,005$  maka ketelitian yang diperoleh berorde sebesar  $\sim 10^{-6}$ .

*Contoh 1.11.* Dalam Fisika relativistik, diketahui bahwa energi kinetik yang dimiliki oleh suatu benda yang bergerak dengan kelajuan  $v$  dilihat oleh seorang pengamat adalah sebesar:

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \quad (26)$$

Tinjau fungsi  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  dengan  $x = v/c$ . Untuk kasus non-relativistik, dimana  $x \ll 1$ , uraian Taylor fungsi tersebut hingga orde pertama di sekitar  $x = 0$  adalah:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \quad (27)$$

Sehingga dengan demikian dari persamaan (26) diperoleh:

$$\begin{aligned} E_k &= m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - m_0 c^2 \\ &= \frac{1}{2} m_0 v^2 \end{aligned} \quad (28)$$

yang tidak lain adalah ungkapan energi kinetik untuk kasus non-relativistik yang kita kenal.

## 5.2. Penurunan Persamaan Diferensial dan Integral

Selain dari penerapannya dalam memperoleh hampiran seperti yang dicontohkan pada bagian 5.1, uraian Taylor juga lazim digunakan antara lain misalnya dalam merumuskan persamaan diferensial atau persamaan integral yang menggambarkan dinamika suatu sistem yang relatif kompleks.

*Contoh 1.12.* Penerapan uraian Taylor untuk persamaan integral terkait dengan problem mencari potensial listrik akibat distribusi muatan di suatu titik. Secara matematik, integrasi potensial yang dijumpai biasanya sangat rumit:

$$V(r) = \int_{vol} \frac{\rho(r') d^3 r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \angle \vec{r}, \vec{r}'}} \quad (26)$$

Untuk mengatasinya, tinjau fungsi:

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \angle \vec{r}, \vec{r}'}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \theta}} \end{aligned} \quad (27)$$



dengan  $\varepsilon = r'/r$  dan  $\theta \angle \vec{r}, \vec{r}'$ . Jika diasumsikan bahwa  $\varepsilon < 1$ , maka fungsi di dalam tanda akar pada bagian kanan persamaan (27) dapat diuraikan dalam uraian Taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \theta}} &= 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \theta) + \frac{3}{8}(\varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \theta)^2 + \dots \\ &= 1 + \varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right) + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Uraian ini dapat dengan mudah diperoleh melalui uraian Taylor fungsi  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  di sekitar  $x = 0$ , dengan  $x = \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \theta$ . Berdasarkan hasil di atas, maka integral pada persamaan (26) dapat diselesaikan dalam bentuk:

$$V(r) = \frac{1}{r} \int_{vol} \rho(r') d^3 r' + \frac{1}{r^2} \int_{vol} r' \cos \theta \rho(r') d^3 r' + \dots \quad (29)$$

Teknik memperoleh potensial dengan cara ini ini dikenal sebagai cara *Metode Ekspansi Multipol* dan akan lebih lanjut dibahas dalam perkuliahan Listrik-Magnet.

Contoh lain adalah penerapan dalam menurunkan persamaan diferensial yang menggambarkan dinamika suatu sistem. Misalnya ketika memodelkan persamaan untuk gelombang pada tali dengan memakai asumsi bahwa simpangan yang dialami oleh suatu titik pada tali relatif sangat kecil.

Seperti yang disinggung pada bagian pendahuluan, penerapan uraian Taylor ini dimaksudkan untuk menyederhanakan persoalan terkait yang sering membutuhkan teknik matematika yang sangat rumit. Tetapi, sejak awal harus disadari bahwa pemodelan semacam ini tidak memberikan suatu gambaran yang sifatnya menyeluruh mengenai sistem yang ditinjau, sehingga kadang kita akan kehilangan fenomena-fenomena yang terbuang ketika dilakukan penyederhaan tersebut.

## BAB 2

### BILANGAN KOMPLEKS

#### 1. Pendahuluan

Sistem bilangan kompleks pada dasarnya merupakan perluasan dari sistem bilangan riil. Sistem bilangan ini diperkenalkan untuk memecahkan sistem-sistem persamaan aljabar yang tidak mempunyai jawaban dalam sistem bilangan kompleks. Tinjau misalnya sistem persamaan sederhana  $x^2 - 1 = 0$ . Kita akan dengan cepat mengetahui bahwa jawabannya adalah  $x = \pm 1$ . Tetapi bagaimana dengan persamaan  $x^2 + 1 = 0$ ? Persamaan ini hanya berbeda tanda sedikit dengan yang sebelumnya. Kita akan segera menjawab bahwa  $x = \pm\sqrt{-1}$ , tetapi ini bertentangan dengan konsep bilangan riil, yaitu tidak ada kuadrat suatu bilangan yang berharga negatif. Atas dasar inilah kemudian dikembangkan konsep bilangan baru dalam satuan “ $i$ ” yang jika dikuadratkan akan berharga negatif atau  $i^2 = -1$ . Karena sifatnya yang tidak dijumpai dalam sistem bilangan riil (nyata) maka bilangan tersebut dinamakan bilangan imajiner (khayal).

Dalam Fisika, sistem kompleks memegang peranan yang penting seperti misalnya dalam mempelajari gelombang, rangkaian listrik sampai dengan penggambaran dinamika partikel sub-atomik.

#### 2. Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks didefinisikan sebagai kombinasi linier antara bilangan riil dengan bilangan imajiner sebagai berikut:

$$z = a + ib \tag{1}$$

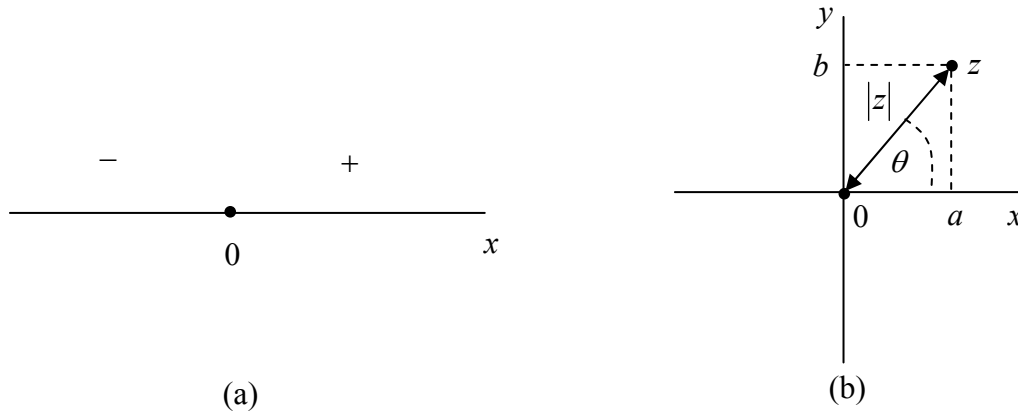
dengan  $a$  merupakan bagian riil dari bilangan kompleks  $z$  dan  $b$  adalah bagian imajiner. Untuk menuliskan masing-masing bagian dinotasikan sebagai:

$$a = \text{Re}(z), \quad b = \text{Im}(z) \tag{2}$$

Berbeda dengan sistem bilangan riil yang memiliki konsep urutan dimana satu bilangan dapat lebih besar atau lebih kecil, maka dalam sistem bilangan kompleks konsep tersebut tidak dikenal.

## 2.1. Bidang Kompleks, Representasi Kartesian dan Polar

Jika dalam sistem bilangan riil kita dapat merepresentasikannya dalam suatu garis lurus seperti yang diilustrasikan pada gambar 1(a), maka bilangan kompleks lazim direpresentasikan dalam suatu bidang kartesian yang dinamakan sebagai bidang kompleks seperti yang diilustrasikan dalam gambar 1(b) dengan sumbu-sumbu  $x = \text{Re}(z)$  dan  $y = \text{Im}(z)$ .



Gambar 1

Dalam representasi ini, untuk setiap bilangan kompleks  $z = a + ib$ , kita dapat mengaitkannya dengan suatu titik  $(a, b)$  di dalam sistem koordinat kartesis. Panjang garis lurus dari titik  $(0,0)$  ke  $(a, b)$  dinamakan *Modulus Bilangan Kompleks* atau  $|z|$ , sedangkan sudut  $\theta$  antara sumbu  $\text{Re}(z)$  dengan garis miring yang ditunjukkan pada Gambar 1(b) dinamakan *Argumen Bilangan Kompleks* atau  $\arg z$ . Besar modulus dan argumen dari bilangan tersebut adalah:

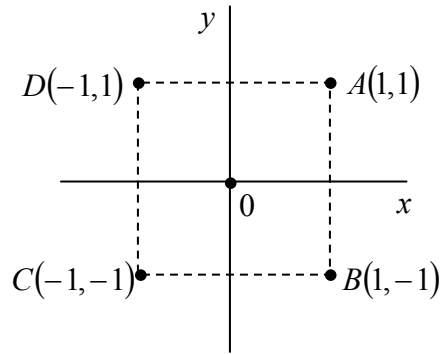
$$|z|^2 = a^2 + b^2 \quad (3a)$$

$$\arg z = \arctan \frac{b}{a} \quad (3b)$$

Dari dua definisi ini, kita dapat pula menyatakan titik pada bidang kompleks tersebut dalam representasi Polar, yaitu dengan menyatakan titik  $(a, b)$  menjadi  $(|z|, \arg z)$ , dimana kedua representasi tersebut dihubungkan oleh persamaan:

$$a = |z| \cos(\arg z), \quad b = |z| \sin(\arg z) \quad (4)$$

*Contoh 2.1.* Nyatakan bilangan kompleks  $A=1+i$ ,  $B=1-i$ ,  $C=-1-i$  dan  $D=-1+i$  dalam representasi kartesis dan polar. Dalam representasi kartesis, titik-titik tersebut diberikan oleh  $A(1,1)$ ,  $B(1,-1)$ ,  $C(-1,-1)$  dan  $D(-1,1)$  dengan posisi titik-titik tersebut dalam bidang kompleks diilustrasikan dalam gambar di bawah.



Untuk menentukan representasinya dalam bentuk polar, maka terlebih dahulu kita cari modulus masing-masing titik serta argumennya. Berdasarkan persamaan (3) kita peroleh untuk bilangan  $A=1+i$  misalnya,  $|A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  dan  $\arg A = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$ , sehingga dengan demikian representasinya dalam bentuk polar diberikan oleh  $A(\sqrt{2}, \pi/4)$ . Dengan cara yang sama diperoleh untuk bilangan yang lainnya  $B(\sqrt{2}, 7\pi/4)$ ,  $C(\sqrt{2}, 5\pi/4)$  dan  $D(\sqrt{2}, 3\pi/4)$ .

## 2.2. Kompleks Konjugat

Untuk menentukan besar modulus bilangan kompleks sebagaimana yang diberikan pada persamaan (3a), diperkenalkan konsep unit bilangan konjugasi  $i^* = -i$ , dengan  $i^*i = 1$ , sehingga dapat didefinisikan kompleks konjugat untuk bilangan kompleks  $z$  :

$$\begin{aligned} z^* &= a + i^* b \\ &= a - ib \end{aligned} \tag{5}$$

Jelas dari sini bahwa untuk memperoleh modulus yang diberikan dalam persamaan (2) dapat dilakukan melalui ungkapan:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z^* z = (a - ib)(a + ib) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{6}$$

*Contoh 2.2.* Tinjau bilangan kompleks  $A = 2 + i$ . Kompleks konjugat bilangan tersebut adalah:  $A^* = 2 - i$ .

### 2.3. Aljabar Bilangan Kompleks

Seperti halnya bilangan riil, pada bilangan kompleks juga berlaku operasi-operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Misalkan kita mempunyai dua bilangan kompleks sebut saja  $z_1 = a_1 + ib_1$  dan  $z_2 = a_2 + ib_2$ , maka untuk operasi-operasi aljabar tersebut berlaku:

(a) Penjumlahan:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned} \quad (7)$$

(b) Pengurangan:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \end{aligned} \quad (8)$$

(c) Perkalian:

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned} \quad (9)$$

(d) Pembagian:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \frac{z_2^*}{z_2^*} \\ &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Jelas terlihat dari hubungan di atas bahwa pada akhir masing-masing operasi tersebut dilakukan pengelompokan atas bagian riil dan imajiner.

*Contoh 2.3.* Tinjau dua bilangan kompleks  $A = 2 + i$  dan  $B = 3 - 2i$ , maka hasil pembagian  $\frac{A}{B^*}$  adalah:  $\frac{A}{B^*} = \frac{(2 + i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{8 - i}{13}$ .

### 3. Persamaan Kompleks dan Kurva pada Bidang Kompleks

Persamaan kompleks adalah sebuah persamaan yang mengandung variabel kompleks, misalnya  $3x + 2iy = 2 - 2iy$  adalah contoh persamaan kompleks dengan  $x$  dan  $y$  merupakan *variabel riil*.

Dua bilangan kompleks adalah sama jika dan hanya jika bagian riilnya sama, demikian pula bagian imajineranya. Misalkan kita memiliki persamaan kompleks  $f_1(x, y) + ig_1(x, y) = f_2(x, y) + ig_2(x, y)$ , maka syarat agar persamaan ini dapat dipecahkan adalah jika  $f_1(x, y) = f_2(x, y)$  dan  $g_1(x, y) = g_2(x, y)$ .

*Contoh 2.4.* Cari pemecahan persamaan kompleks  $z^2 = 1$  dengan  $z = x + iy$ . Nyatakan persamaan tersebut dalam variabel riil  $x$  dan  $y$  sebagai berikut:  $(x + iy)^2 = 1$ . Selanjutnya kita jabarkan persamaan tersebut menjadi:  $x^2 + 2ixy - y^2 = 1$ , sehingga di peroleh persamaan untuk bagian riil dan imajineranya masing-masing (i)  $x^2 - y^2 = 1$  dan (ii)  $2xy = 0$ . Dari persamaan (ii) jika  $x = 0$  maka dari persamaan (i) diperoleh  $y^2 = -1$  dan karena  $y$  seharusnya merupakan bilangan riil, maka hasil ini bukan pemecahan persamaan yang kita tinjau. Jika  $y = 0$ , maka diperoleh  $x^2 = 1$  yang memberikan nilai riil bagi variabel  $x$ . Dengan demikian pemecahan persamaan tersebut adalah  $\{x = \pm 1, y = 0\}$  atau  $z = \pm 1$ .

Jika kita memiliki sebuah persamaan kompleks yang memberikan hanya satu persamaan riil atau  $f(z) = C$  dimana  $z = x + iy$ , dengan  $f(z)$  dan  $C$  masing-masing berharga riil, maka sistem persamaan tersebut akan memberikan pemecahan dalam variabel  $x$  dan  $y$  yang saling tergantung, sehingga menggambarkan suatu kurva dalam bidang  $x - y$  tersebut.

*Contoh 2.5.* Tentukan kurva yang terkait dengan persamaan  $|z - 3| = 1$ . Ungkapan persamaan tersebut dalam variabel  $x$  dan  $y$  adalah:  $|x - 3 + iy| = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = 1$ . Kuadratkan kedua ruas diperoleh persamaan lingkaran  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$  dengan titik pusat di  $(3, 0)$  dan berjari-jari 1.

#### 4. Deret Pangkat Kompleks dan Lingkaran Konvergensi

Seperti halnya ketika kita membahas deret pangkat pada sistem bilangan riil pada bab 1, dalam sistem bilangan kompleks kita juga dapat membangun suatu deret pangkat tak-hingga yang didefinisikan sebagai:

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (11)$$

dengan  $z = x + iy$ , dan  $a_n$  merupakan bilangan kompleks. Untuk menguji konvergensi dari deret tersebut, kita dapat memakai kembali semua perangkat yang telah kita bahas di bab 1 lalu.

*Contoh 2.6.* Tinjau deret berikut:

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad (12)$$

Untuk menentukan konvergensi dari deret pangkat kompleks bolak-balik ini kita uji terlebih dahulu konvergensi mutlak. Dari  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^n}{n} \right| = 0$  dan  $\left| \frac{z^{n+1}}{n+1} \right| < \left| \frac{z^n}{n} \right|$  jelas bahwa deret ini konvergen karena memenuhi syarat konvergen mutlak. Selanjutnya untuk mengetahui harga  $z$  yang membuat deret tersebut konvergen kita gunakan uji rasio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nz^{n+1}}{(n+1)z^n} \right| = |z| < 1 \quad (13)$$

Dengan demikian diperoleh untuk harga  $|z| < 1$  deret (12) konvergen. Mengingat  $|z| = 1$  tidak lain adalah kurva lingkaran dalam bidang kompleks, maka untuk semua nilai  $(x, y)$  yang berada di dalam kurva tersebut deret tersebut konvergen. Untuk  $(x, y)$  yang berada tepat di lingkaran yaitu ketika  $|z| = 1$ , maka kita harus melakukan uji terpisah untuk menentukan konvergensinya dan mengingat analisis pemeriksaannya cukup panjang, maka hal ini tidak kita lakukan.

#### 5. Fungsi Eksponensial Kompleks

Seperti halnya pada pembahasan deret pangkat riil, setiap deret pangkat kompleks yang konvergen akan mendefinisikan sebuah fungsi  $f(z)$  dengan variabel kompleks  $z$

dalam daerah konvergensi deret tersebut dan deret tersebut secara khusus dinamakan sebagai uraian Taylor.

Sekarang kita akan meninjau uraian Taylor dari fungsi kompleks  $f(z) = e^z$  di sekitar  $z = 0$  sebagai berikut (buktikan!):

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \tag{14}$$

Dapat dibuktikan bahwa deret  $\sum \frac{z^n}{n!}$  konvergen untuk seluruh  $z$ , sehingga uraian Taylor fungsi  $f(z) = e^z$  juga memiliki rentang konvergensi yang sama. Dapat diperlihatkan pula bahwa perkalian dan pembagian dua fungsi eksponensial kompleks juga memenuhi hubungan yang sama dengan fungsi eksponensial riil yaitu:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)} \tag{15a}$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{(z_1-z_2)} \tag{15b}$$

Misalkan kita ambil  $z = iy$  atau  $z$  murni bilangan imajiner. Dengan memasukkannya ke dalam persamaan (14), kemudian mengelompokkannya dalam bagian riil dan imajiner diperoleh:

$$e^{iy} = \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right)}_{\cos y} + i \underbrace{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right)}_{\sin y} \tag{16}$$

Bagian imajiner dari ruas kanan persamaan (16) tidak lain adalah uraian Taylor untuk fungsi  $\sin y$ , sedangkan bagian riilnya dapat ditunjukkan merupakan uraian Taylor fungsi  $\cos y$ . Sehingga dengan demikian kita dapati bahwa bentuk fungsi eksponensial bilangan imajiner ekuivalen dengan representasi trigonometrik:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{17}$$

Hubungan yang diberikan oleh persamaan (17) di atas dikenal sebagai rumusan Euler.



*Contoh 2.7.* Nilai dari  $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

Berdasarkan representasi dalam bentuk polar yang diberikan pada persamaan (4), maka bentuk  $z = x + iy$  kini dapat kita nyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (18)$$

dengan  $r = |z|$  dan  $\theta = \arg z$ , dan berdasarkan rumusan Euler pada persamaan (17) bentuk di atas dapat diubah menjadi:

$$z = re^{i\theta} \quad (19)$$

*Contoh 2.8.* Nyatakan bilangan kompleks  $A = \sqrt{3} + i$  ke dalam bentuk eksponensial kompleks. Modulus bilangan tersebut adalah:  $|A| = \sqrt{3+1} = 2$  dan argumennya  $\arg A = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ , sehingga representasinya dalam bentuk eksponensial kompleks adalah  $A = 2e^{i\pi/6}$ .

## 6. Pangkat dan Akar Kompleks

Dari hasil perkalian dua bilangan kompleks yang diberikan pada persamaan (15a), maka pangkat riil  $n$  dari suatu bilangan kompleks, dengan  $n$  adalah bilangan bulat, adalah:

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad (20)$$

Rumus pada persamaan (20) di atas lazim dikenal sebagai rumus de Moivre. Mengingat  $(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ , maka berlaku hubungan bagus berikut:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (21)$$

Karena  $\theta$  pada eksponensial kompleks dapat dihubungkan dengan argumen dari fungsi sinus dan kosinus, maka tanpa mengubah representasi  $z$ , maka berlaku hubungan berikut:

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2m\pi)} \quad (22)$$

karena  $e^{2im\pi} = 1$ .

Berdasarkan persamaan (22) dan dari hasil pembagian dua bilangan kompleks yang diberikan pada persamaan (15b), maka akar pangkat  $n$  dari bilangan kompleks atau  $z^{1/n}$  diberikan oleh:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= r^{1/n} e^{i(\theta/n+2m\pi/n)} \\ &= \sqrt[n]{r} [\cos(\theta/n + 2m\pi/n) + i \sin(\theta/n + 2m\pi/n)] \end{aligned} \quad (23)$$

*Contoh 2.9.* Jika  $A = \sqrt{3} + i$  hitunglah  $A^4$ . Dari contoh 2.8 diketahui  $A = 2e^{i\pi/6}$ , sehingga  $A^4 = (2e^{i\pi/6})^4 = 16e^{i2\pi/3}$  atau  $A^4 = 16 \left[ \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right] = 8(-1 + i\sqrt{3})$ .

*Contoh 2.10.* Hitunglah akar-akar persamaan kompleks  $z^4 = 1$ . Tinjau  $z = \sqrt[4]{1} = (e^{2im\pi})^{1/4}$ , sehingga keempat akar tersebut adalah  $z_m = \cos \frac{m\pi}{2} + i \sin \frac{m\pi}{2}$  dengan  $m = 1, 2, 3, 4$  yang masing-masing adalah: (i)  $z_1 = 0 + i1 = i$  (ii)  $z_2 = -1 + i0 = -1$  (iii)  $z_3 = 0 - i1 = -i$  (iv)  $z_4 = 1 + i0 = 1$ .

## 7. Fungsi Trigonometri, Hyperbolik dan Logaritma Kompleks

Dari rumusan Euler pada persamaan (17), kita dapat menyatakan fungsi-fungsi trigonometrik  $\sin \theta$  dan  $\cos \theta$  dalam bentuk fungsi eksponensial kompleks  $e^{i\theta}$ . Karena  $\cos(-\theta) = \cos \theta$  dan  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ , maka berlaku:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (24b)$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta = (e^{i\theta})^* \quad (24b)$$

Pemecahan kedua persamaan (24) memberikan:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (25a)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (25b)$$

Perluasan persamaan (25) ke bentuk kompleks dapat dilakukan dengan mengganti variabel riil  $\theta$  menjadi variabel kompleks  $z$ . Perluasan ini memberikan fungsi trigonometrik kompleks:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (26a)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (26b)$$

*Contoh 2.11.* Tunjukkan hubungan  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$ , dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah variabel riil. Berdasarkan persamaan (25), melalui manipulasi berikut diperoleh:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \left( \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \right) \left( \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i} + \frac{e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

Misalkan kita ambil bilangan kompleks tersebut murni kuantitas imajiner atau  $z = iy$ , maka diperoleh:

$$\cos iy = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \quad (27a)$$

$$\sin iy = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = i \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \quad (27b)$$

Bentuk di atas mendefinisikan fungsi hiperbolik:

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad (28a)$$

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad (28b)$$

Berdasarkan persamaan (27) terlihat bahwa  $\cos iy = \cosh y$  dan  $\sin iy = i \sinh y$ . Seperti halnya perluasan fungsi trigonometrik riil ke trigonometrik kompleks yang dilakukan dengan mengubah variabel riil  $\theta$  menjadi variabel kompleks  $z$ , maka perluasan fungsi hiperbolik riil pada persamaan (28) ke bentuk kompleks juga dilakukan dengan mengubah variabel riil  $y$  menjadi variabel kompleks  $z$ .

Sekarang kita tinjau fungsi logaritma kompleks:

$$f(z) = \ln z \quad (29)$$

Berdasarkan perkalian dua fungsi kompleks yang diberikan pada persamaan (15a), seperti halnya yang berlaku bagi fungsi logaritma riil, maka:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \quad (30)$$

Tinjau kembali variabel  $z$  dalam representasi polar  $z = r e^{i(\theta + 2m\pi)}$ , dengan  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  dan  $-\pi < \theta \leq \pi$ , maka fungsi logaritma (3) dapat dituliskan menjadi:  $\ln(z) = \ln r e^{i(\theta + 2m\pi)} = \text{Ln } r + \ln e^{i(\theta + 2m\pi)} = \text{Ln } r + i(\theta + 2m\pi) \ln e$ , dan "Ln" menyatakan logaritma riil. Karena  $\ln e = 1$ , maka dengan demikian diperoleh:

$$\ln(z) = \text{Ln } r + i(\theta + 2m\pi) \quad (31)$$

*Contoh 2.12.* Dalam sistem bilangan riil, kita tahu bahwa harga dari  $\ln(-1)$  tidak terdefinisi, tapi berdasarkan persamaan (31), jika kita mendefinisikan  $-1 = e^{i(\pi + 2m\pi)}$  maka diperoleh bahwa  $\ln(-1) = \underbrace{\text{Ln } 1}_{=0} + i(\pi + 2m\pi) = i(\pi + 2m\pi)$ .

## 8. Representasi Fungsi Kompleks

Secara umum, berdasarkan rumusan Euler, semua fungsi kompleks  $f(z)$  selalu dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(z) = r(x, y) e^{i\theta(x, y)} \quad (32)$$

atau

$$\begin{aligned} f(z) &= r(x, y) [\cos \theta(x, y) + i \sin \theta(x, y)] \\ &= u(x, y) + iw(x, y) \end{aligned} \quad (33)$$

dengan

$$u(x, y) = r(x, y) \cos \theta(x, y) \quad (34a)$$

$$w(x, y) = r(x, y) \sin \theta(x, y) \quad (35b)$$

dan sebaliknya berlaku:

$$r(x, y) = \sqrt{u^2(x, y) + w^2(x, y)} \quad (36a)$$

$$\theta(x, y) = \arctan \frac{w(x, y)}{u(x, y)} \quad (36b)$$

*Contoh 2.13.* Nyatakan fungsi  $f(z) = z^2$  dalam representasi polar. Kita ubah terlebih dahulu fungsi tersebut ke dalam variabel  $x$  dan  $y$ :  $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ , dengan demikian  $u(x, y) = x^2 - y^2$  dan  $w(x, y) = 2xy$ , sehingga  $r(x, y) = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$  dan  $\theta(x, y) = \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ .

## 9. Contoh Penerapan dalam Fisika

Sistem bilangan kompleks seringkali digunakan di dalam Fisika untuk membantu kita menggambarkan suatu gejala secara lebih sederhana. Seringkali pula berhubungan dengan fungsi-fungsi kompleks lebih mudah dilakukan ketimbang fungsi-fungsi riil. Representasi kompleks kadang juga diperlukan untuk memberikan gambaran fisis suatu fenomena, seperti misalnya gejala pelemahan gelombang elektromagnetik di dalam bahan. Berikut adalah dua contoh yang di jumpai dalam Fisika.

### 9.1. Gejala Interferensi oleh $N$ Celah

Dalam kajian mengenai gejala gelombang, khususnya interferensi pada layar yang di akibatkan oleh kehadiran  $N$  buah celah, kita dihadapkan dengan persoalan penjumlahan fungsi trigonometrik riil berikut:

$$\sin \delta + \sin 2\delta + \sin 3\delta + \dots + \sin N\delta = \sum_{n=1}^N \sin n\delta \quad (36)$$

Melalui perumusan Euler, yakni dengan memanfaatkan kenyataan bahwa fungsi sinusoidal  $\sin n\delta$  adalah bagian imajiner dari eksponensial kompleks  $e^{in\delta}$ , maka deret pada persamaan (36) tidak lain merupakan bagian imajiner dari deret:

$$\sum_{n=1}^N e^{in\delta} \quad (37)$$

Deret di atas tidak lain merupakan deret geometri  $\sum_{n=1}^N bx^n$  yaitu dengan  $b=1$  dan

$x = e^{i\delta}$ . Telah diketahui pula jumlah yang konvergen deret geometri tersebut adalah sebesar  $\frac{b(1-x^N)}{1-x}$  sehingga untuk kasus yang kita tinjau diperoleh:

$$\frac{(1 - e^{iN\delta})}{1 - e^{i\delta}} \quad (38)$$

Ungkapan  $1 - e^{iN\delta}$  pada persamaan (38) di atas dapat disederhanakan dengan menuliskan  $1 - e^{iN\delta} = e^{iN\delta/2}(e^{-iN\delta/2} - e^{iN\delta/2})$ , kemudian berdasarkan persamaan (25) diperoleh  $1 - e^{iN\delta} = -2ie^{iN\delta/2} \sin \frac{N\delta}{2}$ . Dengan cara yang persis sama juga diperoleh

$1 - e^{i\delta} = -2ie^{i\delta/2} \sin \frac{\delta}{2}$ . Substitusikan kedua hubungan tersebut ke dalam persamaan (38)

diperoleh:

$$\frac{e^{iN\delta/2}}{e^{i\delta/2}} \left( \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) = e^{i(N-1)\delta/2} \left( \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \quad (39)$$

Karena yang kita cari adalah bagian imajiner dari deret (37) maka hasil diperoleh adalah:

$$\sum_{n=1}^N \sin n\delta = \sin \frac{(N-1)\delta}{2} \left( \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \quad (40)$$

## 9.2. Perambatan Gelombang Elektromagnetik di dalam Bahan

Perambatan gelombang listrik dengan amplitudo konstan ke arah  $x$  di dalam bahan digambarkan oleh persamaan Helmholtz berikut:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} E(x) = 0 \quad (41)$$

Dimana  $E$  adalah amplitudo gelombang listrik,  $\omega$  adalah frekuensi sudut gelombang dan  $n$  indeks bias bahan yang dilalui. Persamaan diferensial di atas memiliki solusi sederhana berupa fungsi sinus berikut:

$$E(x) = E_0 \sin(kx) \quad (42a)$$

atau dapat pula berbentuk fungsi cosinus:

$$E(x) = E_0 \cos\left(\frac{n\omega}{c} x\right) \quad (42b)$$

dengan  $E_0$  adalah amplitudo maksimum dan  $k = n\omega/c$  dinamakan bilangan gelombang. Kedua solusi sama-sama memenuhi persamaan Helmholtz (41). Berdasarkan fakta ini, kita dapat menggunakan representasi kompleks untuk gelombang listrik tersebut dengan menuliskannya kembali sebagai berikut:

$$E(x) = E_0 e^{ikx} \quad (43)$$

Untuk memplotkan solusi tersebut dalam sistem bilangan riil, kita dapat mengambil bagian riilnya atau bagian imajinernya saja, karena keduanya secara prinsip menggambarkan keadaan yang sama. Dalam kebutuhan untuk mencari besaran-besaran seperti distribusi energi listrik di dalam bahan, gelombang listrik dalam representasi kompleks pada persamaan (43) lebih memudahkan dalam pemakaiannya ketimbang representasi riil pada persamaan (42).

Jika bahan yang kita tinjau merupakan bahan yang dapat menyerap gelombang tersebut sehingga terjadi atenuasi (pelemahan) atau bahan yang absorptif, maka kita dapat melakukan modifikasi pada persamaan Helmholtz (41) dengan memasukkan indeks bias bahan dalam bentuk kompleks sebagai berikut:

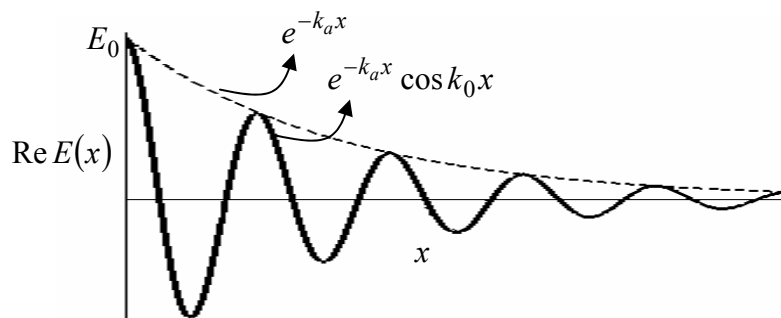
$$n = n_0 + in_a \quad (44)$$

dengan  $n_a$  adalah bagian imajiner indeks bias yang terkait dengan atenuasi gelombang. Berdasarkan model ini, kita akan mendapatkan bahwa pemecahan persamaan (41) dengan bentuk sebagai berikut:

$$E(x) = E_0 e^{-k_a x} e^{ik_0 x} \quad (45)$$

Terlihat bahwa suku  $e^{-k_a x}$ , dengan  $k_a = n_a \omega / c$ , adalah bagian yang bertanggung jawab atas peristiwa atenuasi tersebut. Untuk menggambar persamaan (45) dalam sistem bilangan riil seperti ditunjukkan pada gambar 1, kita dapat mengambil, misal, bagian riilnya saja:

$$\text{Re } E(x) = E_0 e^{-k_a x} \cos k_0 x \quad (46)$$



Gambar 1

## BAB 3

### RUANG VEKTOR DAN MATRIKS

#### 1. Pendahuluan

Konsep mengenai vektor di dalam Fisika memainkan peranan yang sangat fundamental dalam rangka memberikan kejelasan atas fenomena yang dibahas. Secara Fisika, vektor adalah cara merepresentasikan suatu besaran fisis tertentu yang memiliki besar dan arah. Besaran-besaran yang digambarkan dengan menggunakan konsep vektor di antaranya adalah kecepatan, percepatan, medan listrik dan medan magnet serta masih banyak lagi contoh lainnya.

Perluasan dari konsep vektor dinamakan *tensor*. Secara matematika, tensor dapat direpresentasikan dalam bentuk *matriks*, demikian juga dengan vektor yang dapat dituliskan dalam bentuk matriks kolom. Besaran Fisika yang direpresentasikan dalam bentuk tensor antara lain misalnya tekanan dan permitivitas bahan dielektrik. Pada bab ini, kita akan mempelajari secara khusus pengertian dari vektor sebagai elemen dari suatu ruang vektor serta aljabar vektor. Sebagai persiapan untuk mempelajari konsep tensor pada materi perkuliahan Fisika Matematika II, kita akan pula mempelajari konsep mengenai matriks. Selain dari keperluan untuk mempelajari tensor, matriks juga memiliki kegunaan lain seperti misalnya untuk memecahkan persamaan linier dengan  $n$  buah variabel yang tidak diketahui.

#### 2. Ruang Vektor

Ada banyak objek Matematika yang digunakan dalam Fisika yang membolehkan kita untuk melakukan penjumlahan, dan perkalian dengan suatu bilangan skalar. Kumpulan objek Matematika yang memenuhi persyaratan seperti itu dinamakan *ruang vektor*. Sebuah ruang vektor memiliki beberapa sifat berikut:

1. Jika kita menjumlah dua anggotanya, maka akan diperoleh yang anggota lain dari ruang vektor tersebut. Misakan  $\vec{a}$  dan  $\vec{b} \in W$ , dimana  $W$  adalah sebuah ruang vektor maka  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \in W$ .



2. Jika kita mengalikan satu anggotanya dengan sebuah bilangan yang disebut skalar, maka kita juga akan memperoleh anggota lain dari ruang vektor tersebut. Misalkan  $\alpha$  adalah sebuah skalar, maka  $\alpha \vec{a} \in W$ .
3. Operasi perkalian dengan skalar dan penjumlahan bersifat distributif,  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$ .
4. Selalu terdapat vektor nol  $\vec{0}$  sedemikian sehingga  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .
5. Terdapat sebuah vektor  $-\vec{a}$ , sehingga  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .

Jika skalar  $\alpha$  adalah bilangan riil, maka ruang vektor tersebut dinamakan ruang vektor riil, sedangkan jika sebuah bilangan kompleks, dinamakan ruang vektor kompleks. Untuk selanjutnya kita akan membatasi diri pada ruang vektor riil saja.

Dengan menggunakan dua operasi perkalian dengan skalar dan penjumlahan, kita dapat membuat suatu penjumlahan berikut:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \sum \alpha_n \vec{a}_n \in W \quad (1)$$

dimana  $\alpha_n$  adalah skalar riil. Penjumlahan pada persamaan (1) dinamakan kombinasi linier dari  $n$  buah vektor dan koefisien  $\alpha_n$  dinamakan *komponen* dari kombinasi linier.

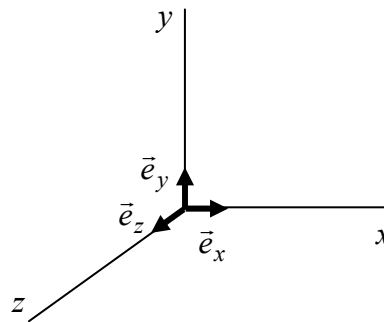
Jika kita dapat menjumlahkan  $\sum_n \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$  dengan  $\alpha_n \neq 0$  maka dikatakan vektor-vektor tersebut saling bergantung secara linier, sedangkan jika semua  $\alpha_n = 0$  maka dikatakan vektor-vektor tersebut tidak saling bergantung secara linier dan  $\vec{a}_n$  dinamakan vektor basis. Sebuah ruang vektor yang didalamnya didefinisikan panjang dari sebuah vektor dinamakan ruang vektor bermetrik atau *ruang metrik*.

### 3. Ruang Vektor Riil Tiga Dimensi

Contoh sederhana ruang vektor bermetrik yang sudah kita kenal adalah himpunan vektor-vektor dalam koordinat kartesis tiga dimensi seperti yang diilustrasikan pada gambar 1. Misalkan terdapat tiga vektor yang kita labelkan dengan  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  dan  $\vec{e}_z$  dan masing-masing memiliki arah ke sumbu  $x$ ,  $y$  dan  $z$  positif, maka jika kita melakukan penjumlahan berikut:

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \quad (2)$$

dengan  $\vec{A}$ ,  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  dan  $\vec{e}_z \in W$ , sementara  $A_x$ ,  $A_y$  dan  $A_z$  adalah skalar riil yang merupakan komponen dari vektor  $\vec{A}$  tersebut. Karena  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  dan  $\vec{e}_z$  saling tegak lurus satu sama lain dalam sistem koordinat kartesian yang kita tinjau, maka terlihat bahwa kondisi  $\vec{A} = \vec{0}$  hanya dapat dipenuhi jika  $A_x = A_y = A_z = 0$ , sehingga dengan demikian  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  tidak lain adalah vektor basis pada ruang vektor kartesian tiga dimensi.



Gambar 1

Panjang sebuah vektor dituliskan sebagai  $|\vec{A}|$  dan secara spesifik akan digunakan selanjutnya bahwa ketiga vektor satuan dalam koordinat kartesis memiliki panjang  $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$ . Ketiga vektor basis tadi lazim dinamakan sebagai vektor basis satuan atau vektor satuan saja. Untuk vektor yang merupakan kombinasi linier dari ketiga vektor satuan tersebut, seperti yang diberikan oleh persamaan (2), panjangnya didefinisikan sebagai:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (3)$$

*Contoh 3.1.* Tinjau suatu titik yang berada pada koordinat  $(3, 4)$  pada sistem koordinat kartesis. Tentukan vektor posisi titik tersebut dan panjangnya. Dari posisi titik tersebut diketahui  $r_x = 3$  dan  $r_y = 4$ , sehingga vektor posisi yang dimaksud adalah:

$$\vec{r} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y \text{ sedangkan panjangnya adalah } |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

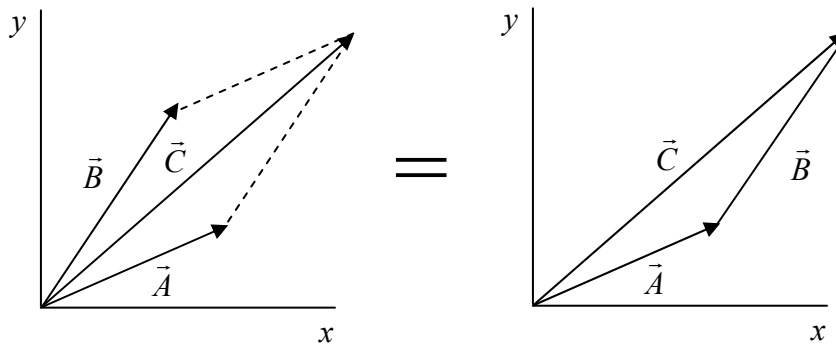
### 3.1. Penjumlahan Vektor

Jika kita menjumlahkan dua atau lebih vektor, maka kita akan memperoleh hasil penjumlahan juga dalam bentuk vektor yang biasa disebut sebagai vektor resultan. Karena vektor memiliki besar dan arah, maka penjumlahannya tidak seperti kita menjumlahkan bilangan skalar biasa. Penjumlahan vektor memiliki kemiripan dengan menjumlahkan bilangan kompleks. Jika pada penjumlahan kompleks bagian riil dijumlahkan dengan bagian riil demikian juga bagian imajiner dengan bagian imajiner, maka pada penjumlahan vektor yang dilakukan adalah dengan menjumlahkan secara aljabar biasa bagian yang searah. Misalkan kita memiliki  $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$  dan  $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$ , maka penjumlahan dan pengurangan antara keduanya adalah:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{e}_x + (A_y + B_y)\vec{e}_y + (A_z + B_z)\vec{e}_z = \vec{C} \quad (4a)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{e}_x + (A_y - B_y)\vec{e}_y + (A_z - B_z)\vec{e}_z = \vec{D} \quad (4b)$$

Secara grafik, kita dapat memindah-mindahkan posisi dari sebuah vektor pada sistem koordinat kartesis selama arah dan panjangnya tidak berubah seperti yang di contohkan pada Gambar 2, sehingga penjumlahan  $\vec{A} + \vec{B}$  dapat pula dilakukan dengan mempertemukan kepala vektor  $\vec{A}$  dengan ekor vektor  $\vec{B}$ .



Gambar 2

Dua buah vektor dikatakan paralel jika koefisien-koefisiennya sebanding atau dengan kata lain memenuhi kondisi berikut:

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} \quad (5)$$

### 3.2. Perkalian Antar Vektor

Dalam ruang vektor, selain berlaku penjumlahan, dapat didefinisikan juga operasi lain yaitu "perkalian" atau *product*. Perkalian antara dua vektor diklasifikasikan atas perkalian skalar (*scalar product*) atau perkalian titik (*dot product*), dan perkalian vektor (*vector product*) atau perkalian silang (*cross product*). Selain itu ada lagi perkalian lainnya yang dinamakan perkalian langsung atau *direct product*. Perkalian skalar akan menghasilkan sebuah skalar, dan perkalian vektor akan menghasilkan sebuah vektor sedangkan perkalian langsung akan menghasilkan sebuah tensor. Pada pembahasan selanjutnya kita hanya akan membatasi diri pada kasus perkalian skalar dan vektor saja, sedangkan perkalian langsung yang menghasilkan tensor akan dibahas pada materi Fisika Matematika II.

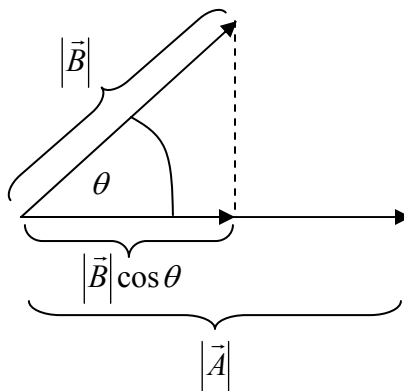
#### 3.2.1. Perkalian Skalar

Perkalian skalar antara dua buah vektor, misalnya  $\vec{A}$  dan  $\vec{B}$ , dituliskan sebagai  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  dan didefinisikan sama dengan perkalian antara panjang vektor kedua vektor dan cosinus sudut antara kedua vektor tersebut:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad (6)$$

dengan  $\theta = \angle \vec{A}, \vec{B}$ , yang hasilnya merupakan sebuah bilangan skalar dan bersifat komutatif:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ .

Secara geometri, perkalian ini dapat diartikan sebagai perkalian antara panjang suatu vektor dengan proyeksi vektor lain pada arah vektor tersebut. Terlihat pada Gambar 3, hasil perkalian  $|\vec{B}| \cos \theta$  merupakan panjang dari komponen vektor  $\vec{B}$  yang searah dengan vektor  $\vec{A}$ .



Gambar 3

Berdasarkan definisi perkalian skalar yang diberikan pada persamaan (6), terdapat dua sudut khusus yakni  $\theta = 0$ , yakni ketika dua vektor searah dan  $\theta = 90^\circ$  ketika keduanya saling tegak lurus. Misalkan  $\vec{A}$  dan  $\vec{B}$  saling tegak lurus maka:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos 90^\circ = 0 \quad (7)$$

Sedangkan untuk perkalian skalar antara vektor  $\vec{A}$  dengan dirinya sendiri, yang tentu saja searah, adalah:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{A}| \cos 0^\circ = |\vec{A}|^2 \quad (8)$$

Sekarang perhatikan bentuk penulisan vektor yang direpresentasikan dalam vektor satuan  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  dan  $\vec{e}_z$  seperti yang dicontohkan pada persamaan (2), maka berdasarkan persamaan (7) kita dapatkan bahwa:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (9)$$

sedangkan dari persamaan (8)

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \quad (10)$$

Misalkan vektor  $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$  dan  $\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z$ , maka:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (11)$$

Sedangkan panjang sebuah vektor dapat dihitung melalui:

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (12)$$

*Contoh 3.2.* Tinjau vektor berikut:  $\vec{A} = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z$  dan  $\vec{B} = 2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3\vec{e}_z$ . Tentukan sudut diantara keduanya. Berdasar persamaan-persamaan (6) dan (9), sudut antara keduanya dapat diperoleh melalui hubungan  $\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$ ,

dengan  $|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$  dan  $|\vec{B}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ , dihitung berdasarkan persamaan (10). Dengan demikian diperoleh:  $\cos \theta = \frac{(-2)2 + 3(-1) + 1 \cdot 3}{14} = \frac{-4}{14}$ ,

sehingga  $\theta = \arccos \frac{-4}{14} \approx 107^\circ$ .

### 3.2.2. Perkalian Vektor

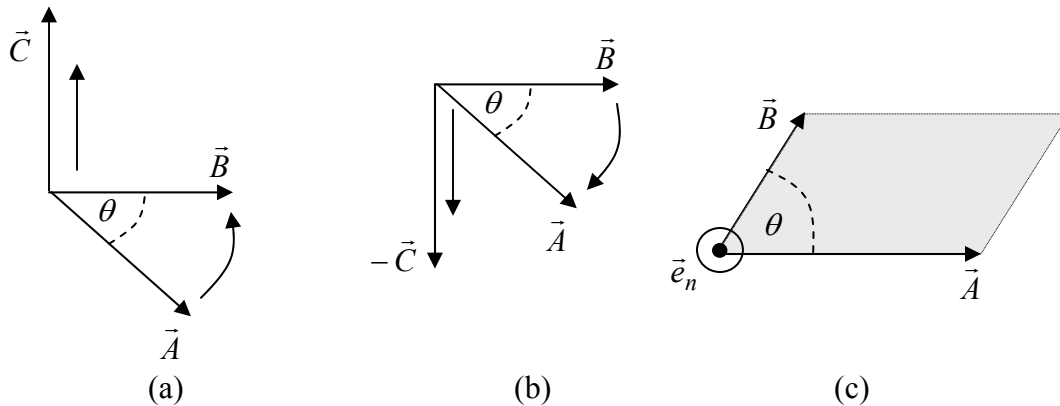
Jika pada perkalian skalar dihasilkan sebuah bilangan skalar, maka pada perkalian vektor dihasilkan sebuah vektor pula. Perkalian vektor antara vektor  $\vec{A}$  dan  $\vec{B}$  dituliskan sebagai

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \quad (13)$$

Dimana  $\vec{C}$  adalah vektor hasil perkalian yang dengan besarnya adalah:

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \quad (14)$$

Sedangkan arah vektor  $\vec{C}$ , sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 4(a), ditentukan oleh kaidah tangan kanan, sama seperti ketika kita menentukan arah sumbu-sumbu koordinat kartesis tiga dimensi, yakni dengan memutar dari vektor  $\vec{A}$  ke arah  $\vec{B}$  sehingga membentuk suatu bidang dan arah vektor  $\vec{C}$  tegak lurus bidang tersebut. Jelas terlihat dari Gambar 4(b), bahwa perkalian ini bersifat anti-komutatif:  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ .



Gambar 4

Menarik untuk dicatat bahwa besar vektor  $\vec{C}$  pada persamaan (14) tidak lain adalah luas jajaran genjang seperti yang terlihat pada Gambar 4(c), dengan vektor  $\vec{C}$  tegak lurus bidang tersebut. Secara khusus kita dapat mendefinisikan sebuah vektor satuan yang disebut sebagai vektor normal tegak lurus bidang arsir pada Gambar 4(c):

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} \quad (15)$$

Kembali pada ruang vektor tiga dimensi pada koordinat kartesis, berdasarkan penentuan arah vektor hasil perkalian ini, maka untuk vektor satuan  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  dan  $\vec{e}_z$  diperoleh (buktikan!):

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0 \quad (16a)$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \quad (16b)$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x, \quad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \quad (16c)$$

Dari sini kita peroleh untuk perkalian vektor  $\vec{A} \times \vec{B}$  dengan  $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$  dan  $\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z$ :

$$\begin{aligned} & (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \times (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) = \\ & A_x B_x \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_x)}_0 + A_x B_y \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}_{\vec{e}_z} + A_x B_z \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{-\vec{e}_y} + \dots = \quad (17) \\ & \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned}$$

*Contoh 3.3.* Tinjau vektor-vektor  $\vec{A} = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z$  dan  $\vec{B} = 2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3\vec{e}_z$ .

Tentukanlah vektor normal bidang datar yang menghubungkan kedua vektor tersebut, dan buktikan bahwa vektor normal tersebut tegak lurus dengan vektor  $\vec{A}$  dan  $\vec{B}$  tersebut. Berdasarkan hubungan yang diberikan pada persamaan (15), maka kita terlebih dahulu harus mencari perkalian vektor keduanya dan dari persamaan (17) kita peroleh:

$$\begin{aligned} (-2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \times (2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3\vec{e}_z) &= \vec{e}_x (3 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)) + \vec{e}_y (1 \cdot 2 - (-2) \cdot 3) + \\ & \vec{e}_z ((-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 2) \end{aligned}$$

Sehingga  $\vec{A} \times \vec{B} = 10\vec{e}_x + 8\vec{e}_y - 4\vec{e}_z$ , dan panjangnya  $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{10^2 + 8^2 + 4^2} = 6\sqrt{5}$ .

Dengan demikian didapatkan vektor normal bidang datar yang bersangkutan adalah:

$$\vec{e}_n = \frac{10\vec{e}_x + 8\vec{e}_y - 4\vec{e}_z}{6\sqrt{5}}. \text{ Tinjau perkalian skalar } \vec{e}_n \cdot \vec{A}, \text{ berdasarkan persamaan (11) kita}$$

dapatkan  $\vec{e}_n \cdot \vec{A} = \frac{1}{6\sqrt{5}} (10 \cdot (-2) + 8 \cdot 3 + (-4) \cdot 1) = 0$ , sehingga dengan demikian keduanya

tegak lurus. Dapat dibuktikan dengan cara yang sama bahwa  $\vec{e}_n \perp \vec{B}$ .

### 3.3. Persamaan Garis Lurus dan Bidang Datar

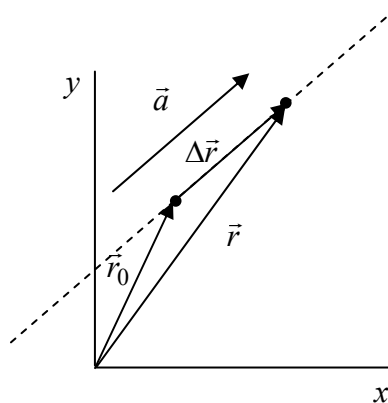
#### 3.3.1. Persamaan Garis Lurus

Perumusan mengenai vektor yang telah kita bahas tadi dapat diterapkan untuk mencari persamaan dari sebuah garis lurus. Misalkan kita memiliki dua buah titik di dalam suatu koordinat kartesis (untuk sederhananya kita tinjau kasus dua dimensi) seperti pada Gambar 5, yaitu  $(x_0, y_0)$  dan  $(x, y)$ . Kedua titik tersebut dapat dinyatakan posisinya dalam bentuk vektor masing-masing  $\vec{r}_0 = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y$  dan  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ , sehingga kita mempunyai vektor  $\Delta\vec{r} = (x - x_0)\vec{e}_x + (y - y_0)\vec{e}_y$  yang terkait dengan persamaan garis yang kita cari. Misalkan kita juga memiliki vektor  $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$  yang paralel dengan garis yang kita ingin ketahui persamaannya, maka dari syarat dua vektor paralel yang diberikan pada persamaan (5) dihasilkan:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} \quad (17)$$

Persamaan (17) merupakan persamaan garis lurus yang dimaksud, dan perluasannya untuk sistem tiga dimensi diberikan oleh:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} \quad (18)$$



Gambar 5

*Contoh 3.4.* Tentukan persamaan garis lurus yang melewati titik-titik  $a(1, -1, -5)$  dan  $b(2, -3, -3)$ . Vektor yang paralel dengan garis lurus yang dimaksud adalah



$\vec{a} - \vec{b} = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$ . Dengan demikian, persamaan garis yang dimaksud adalah:

$\frac{x-x_0}{-1} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{-2}$ . Nilai  $x_0$ ,  $y_0$  dan  $z_0$  dapat diambil dari salah satu titik yang

diketahui,  $a$  misalnya, kemudian dimasukkan ke dalam persamaan yang kita peroleh,

sehingga didapat persamaan akhirnya adalah:  $x-1 = \frac{y+1}{2} = -\frac{z+5}{2}$ .

### 3.3.2. Persamaan Bidang Datar

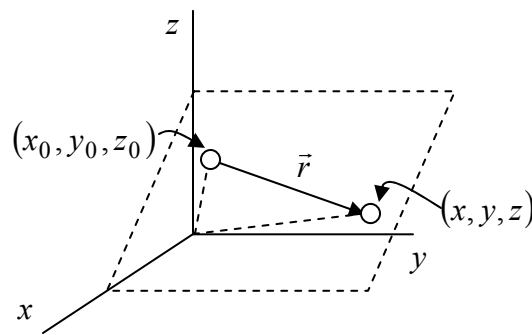
Secara umum, sebuah persamaan bidang dapat dinyatakan sebagai  $f(x, y, z) = 0$ . Khusus untuk bidang yang merupakan bidang datar, maka persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$c_x x + c_y y + c_z z + c_0 = 0 \quad (18)$$

dengan  $c_x, c_y, c_z$  dan  $c_0$  adalah konstanta. Kemudian misalkan di bidang tersebut terdapat vektor:

$$\vec{r} = (x-x_0)\vec{e}_x + (y-y_0)\vec{e}_y + (z-z_0)\vec{e}_z \quad (19)$$

yang membentuk sebuah garis sebarang, seperti diilustrasikan pada Gambar 6.



Gambar 6

Selanjutnya untuk memperoleh persamaan tersebut, kita harus mengetahui paling sedikit dua buah garis lurus yang berada pada bidang tersebut. Misalkan kedua garis tersebut adalah  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$ , maka dari keduanya kita dapat memperoleh informasi mengenai vektor yang tegak lurus dengan bidang tersebut  $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$  dari bidang tersebut. Misalkan bentuk dari vektor normal tersebut dituliskan sebagai  $\vec{N} = c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z$ ,

maka persamaan bidang (18) akan diperoleh melalui hubungan  $\vec{N} \cdot \vec{r} = 0$  dimana  $c_0 = c_x x_0 + c_y y_0 + c_z z_0$ .

*Contoh 3.5.* Misalkan pada suatu bidang terdapat dua buah vektor masing-masing  $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$  dan  $\vec{b} = \vec{e}_x - 3\vec{e}_z$ , maka vektor normal bidang yang dibentuknya adalah  $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} = -6\vec{e}_x + 8\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$ , sehingga dengan demikian diperoleh persamaan bidangnya adalah  $3x - 4y + z + 6 = 0$ .

#### 4. Matriks

Misalkan kita memiliki suatu susunan bilangan seperti yang dicontohkan di bawah ini:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (ii) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ atau } (iii) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Maka susunan bilangan yang diatur sedemikian rupa dalam format baris dan kolom yang membentuk sebuah persegi tersebut dinamakan *Matriks*. Sebuah matriks  $A$  dikatakan berukuran  $(m \times n)$  jika memiliki  $m$  baris dan  $k$  kolom, dengan elemen pada baris ke  $i$  dan kolo ke  $j$  dilambangkan dengan  $a_{ij}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{kolom ke } j \\ \downarrow \\ \leftarrow \text{baris ke } i \end{array} \quad (21)$$

Dengan indeks  $i$  berjalan dari  $i = 1$  hingga  $i = m$ , sedangkan indeks  $j$  dari  $j = 1$  hingga  $j = n$ .

Bila jumlah baris dan kolom sebuah matriks sama atau  $m = n$ , maka matriks tersebut dinamakan sebagai matriks *bujur sangkar* berukuran  $n \times n$ , atau disebut matriks berorde  $n$ . Jika setiap elemen sebuah matriks merupakan bilangan riil, maka matriks tersebut dinamakan matriks riil. Sedangkan jika sekurang-kurangnya terdapat satu elemen yang berbentuk bilangan kompleks, maka matriks tersebut dinamakan matriks kompleks. Semua operasi matriks yang akan dibahas berikut ini berlaku baik untuk matriks riil

maupun matriks kompleks. Sebuah matriks  $A$  berukuran  $m \times n$  dengan elemen  $a_{ij}$  seringkali ditulis secara ringkas dalam bentuk  $A = \{a_{ij}\}$ .

#### 4.1. Aljabar Matriks

Dua buah matriks adalah sama jika dan hanya jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan setiap elemen pada baris dan kolom yang sama juga memiliki harga yang sama. Jadi, jika  $A = \{a_{ij}\}$  dengan ukuran  $m \times n$  dan terdapat matriks lain  $B = \{b_{ij}\}$  yang berukuran  $p \times q$ , maka keduanya sama jika  $m = p$  dan  $n = q$ , serta  $a_{ij} = b_{ij}$  untuk semua  $i$  dan  $j$ .

##### 4.1.1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks  $A$  dan  $B$  yang berukuran sama dapat dijumlahkan atau dikurangkan dengan hasil juga merupakan sebuah matriks baru, sebut saja  $C$ , yang berukuran sama. Elemen dari matriks  $C$  ini merupakan hasil penjumlahan atau pengurangan dari elemen-elemen matriks  $A$  dan  $B$  yang berada pada posisi baris dan kolom yang sama. Jadi, misalkan  $A = \{a_{ij}\}$  dan  $B = \{b_{ij}\}$  masing-masing berukuran  $m \times n$ , maka  $A \pm B = C$  dengan  $\{c_{ij}\} = \{a_{ij}\} \pm \{b_{ij}\}$

*Contoh 3.6.* Misalkan  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ , maka:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+4 \\ 0+(-3) & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Dapat dihitung dengan}$$

$$\text{mudah bahwa } A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

##### 4.1.2. Perkalian dengan Sebuah Skalar

Perkalian sebuah matriks  $A$  dengan sebuah bilangan skalar  $c$ , menghasilkan sebuah matriks baru  $B$  dengan ukuran yang sama dan elemen-elemennya merupakan hasil kali delemen matriks  $A$  dengan  $c$ . Misalkan  $A = \{a_{ij}\}$  dengan ukuran  $m \times n$ , maka  $cA = B$ , dengan  $B = \{b_{ij}\}$  adalah matriks dengan ukuran  $m \times n$  dimana  $b_{ij} = ca_{ij}$ .

*Contoh 3.7.* Misalkan  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ , maka  $2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ .

### 4.1.3. Perkalian Matriks

Sebuah matriks  $A$  berukuran  $m \times n$  dapat mengalikan sebuah matriks  $B$  berukuran  $n \times p$  dari kiri, yang menghasilkan sebuah matriks  $C = AB$  dengan ukuran  $m \times p$ . Elemen dalam baris ke  $i$  dan kolom ke  $j$  dari matriks  $C$  adalah jumlah dari:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj} \quad (22)$$

Persamaan (22) mengatakan: "elemen ke  $i$  dan  $j$  dari matriks hasil kali  $AB = C$ , diberikan oleh jumlah hasil kali setiap elemen matriks  $A$  dalam baris ke  $i$ , satu per satu, dari kiri ke kanan dengan elemen matriks  $B$  dalam kolom ke  $j$  dari atas ke bawah".

*Contoh 3.8.* Tinjau perkalian antara matriks  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$  berukuran  $2 \times 3$  dan matriks  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$  berukuran  $3 \times 2$ . Tentukan ukuran matriks  $C$  elemen-

elemen dari matriks tersebut. Ukuran matriks  $C$  adalah  $(2 \times 3) \otimes (3 \times 2) = (2 \times 2)$ . Berdasarkan persamaan (22), elemen-elemen dalam matriks  $C$  tersebut adalah:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$

Secara umum perkalian dua buah matriks tidak memenuhi sifat komutatif yakni:  $AB \neq BA$ . Jika kedua matriks memenuhi kondisi  $AB = BA$ , maka dikatakan keduanya saling komut.

## 5. Matriks dan Sistem Persamaan Linier

### 5.1. Pemecahan dengan Metode Reduksi Baris/Eliminasi Gauss

Formulasi matriks seringkali digunakan untuk memecahkan sistem persamaan linier melalui metode *Reduksi Baris* atau *Eliminasi Gauss*. Tinjau sistem persamaan linier dalam variabel  $x, y, z$  sebagai berikut:

$$2x + y - z = 2 \quad (23a)$$

$$x - y + z = 7 \quad (23b)$$

$$2x + 2y + z = 4 \quad (23c)$$

Secara konvensional, yang dapat kita lakukan adalah dengan melakukan substitusi berulang-ulang, sampai kita memperoleh solusi persamaan (23). Langkah berulang yang dimaksud tersebut misalnya: dari persamaan (23a) kita peroleh  $2x = 2 - y + z$ , kemudian kita masukkan ke dalam persamaan (23c), sehingga persamaan tersebut menjadi  $y + 2z = 2$ , sehingga sistem (23) kini menjadi:  $2x + y - z = 2$ ,  $x - y + z = 7$ ,  $y + 2z = 2$ . Langkah serupa dapat terus kita lakukan sampai dengan kita berhasil memperoleh solusi yang dimaksud. Tentu saja langkah ini kurang terprogram. Dengan menggunakan metode reduksi baris, yang pada dasarnya sama dengan proses konvensional ini, kita dapat membuatnya menjadi lebih terprogram

Sistem persamaan (23) di atas dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks  $AX = B$  sebagai berikut:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}}_B \quad (24)$$

Matriks  $A$  pada persamaan (24) disebut juga sebagai matriks koefisien. Melalui metode reduksi baris kita dapat melakukan langkah-langkah berikut terhadap matriks  $A$  dan  $B$  secara simultan:

1. Menukarkan posisi dua buah baris.
2. Mengalikan sebarang baris dengan sebuah konstanta tidak nol.
3. Menjumlahkan atau mengurangkan hasil sebuah baris dengan baris yang lainnya.

Hasil yang diharapkan dari langkah-langkah tersebut adalah dihasilkannya sebuah matriks berbentuk:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Sehingga solusi dari sistem persamaan linier yang dimaksud diberikan oleh:

$$x = c_1/a_1, \quad y = c_2/a_2, \quad z = c_3/a_3 \quad (26)$$

Untuk mengimplementasikan metode ini, kita dapat membentuk suatu matriks baru  $(A | B)$  yang elemennya merupakan gabungan dari matriks  $A$  dan  $B$  yang lazim disebut sebagai matriks perluasan (*augmented matrix*). Matriks perluasan untuk kasus persamaan (24) adalah:

$$(A | B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad (27)$$

Kini kita terapkan langkah-langkah yang telah disebutkan tadi pada matriks (27):

Langkah 1. Tukarkan baris 1 dan 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Langkah 2. Kurangkan baris 3 dengan baris 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Langkah 3. Tukarkan baris 3 dengan baris 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Langkah 4. Kalikan baris 1 dengan  $-2$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Langkah 5. Jumlahkan baris 3 dengan baris 1:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \end{array} \right)$$

Langkah 6. Kalikan baris 2 dengan  $-3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -14 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \end{array} \right)$$

Langkah 7. Jumlahkan baris 3 dengan baris 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -14 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array} \right)$$

Langkah 8. Kalikan baris 2 dengan  $2/3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -14 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array} \right)$$

Langkah 9. Jumlahkan baris 1 dengan baris 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -6 & -18 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array} \right)$$

Langkah 10. Kalikan baris 3 dengan  $-2/3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -6 & -18 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array} \right)$$

Langkah 11. Jumlahkan baris 1 dengan baris 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array} \right)$$

Langkah 12. Kalikan baris 3 dengan  $-2/3$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right)$$

Langkah 13. Jumlahkan baris 2 dengan baris 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right)$$

Dengan demikian jelas berdasarkan persamaan (26), solusi dari persamaan (24) diberikan oleh  $x = 3$ ,  $y = -2$  dan  $z = 2$ . Langkah-langkah di atas bukanlah satu-satunya yang dapat diambil, kita dapat mengambil langkah lain yang mungkin lebih singkat.

## 5.2. Determinan

Tinjau matriks bujur sangkar  $A$  dengan orde  $n$ . Determinan dari sebuah matriks dengan  $n = 1$ ,  $A = a_{11}$ , didefinisikan sebagai:

$$\det(A) = a_{11} \quad (28)$$

Sedangkan untuk matriks dengan orde  $n = 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , maka determinannya adalah:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (29)$$

Untuk mengetahui asal dari pendefinisian determinan untuk matriks berorde  $n$  kita tinjau terlebih dahulu pengertian *hasil kali elementer matriks*  $A$ , yang didefinisikan sebagai perkalian antara  $n$ -buah elemen yang satu sama lain berbeda baris atau kolomnya, dimana  $n$  adalah orde dari matriks yang ditinjau. Untuk matriks orde 2, hasil kali elementernya adalah:

$$a_{11}a_{22} \text{ dan } a_{12}a_{21} \quad (30)$$



Sedangkan  $a_{11}a_{21}$  dan  $a_{12}a_{22}$  bukan merupakan hasil kali elementer karena masing-masing berada pada kolom yang sama, demikian juga  $a_{11}a_{12}$  dan  $a_{21}a_{22}$  karena berada pada baris yang sama.

Selanjutnya untuk kemudahan penjelasan, kita tuliskan hasil kali elementer (30) dalam bentuk:

$$a_{1(1)}a_{2(2)}, a_{1(2)}a_{2(1)} \quad (31)$$

Perhatikan angka yang dikurung pada indeks masing-masing elemen yaitu (i)  $[(1), (2)]$  dan (ii)  $[(2), (1)]$ , terlihat bahwa urutan keduanya berbeda dan keduanya merupakan permutasi (1) dan (2). Ditetapkan bahwa bentuk urutan (i) merupakan sebuah permutasi genap, sedangkan untuk bentuk urutan (ii) merupakan permutasi ganjil, karena untuk mengubah bentuk (ii) menjadi bentuk (i), kita membutuhkan satu langkah yakni  $[(2), (1)] \rightarrow [(1), (2)]$ . Dengan kata lain, karena telah ditetapkan bahwa (i) adalah permutasi genap, maka urutan berikutnya yang diperoleh dengan melakukan satu langkah penukaran dikatakan memiliki permutasi ganjil.

Untuk membedakan antara urutan yang merupakan permutasi genap dengan ganjil, maka tanda bagi permutasi genap adalah (+) sedangkan untuk permutasi ganjil bertanda (-). Kembali pada hasil kali elementer (31), maka  $a_{1(1)}a_{2(2)}$  bertanda positif atau  $+a_{1(1)}a_{2(2)}$  (untuk selanjutnya tanda positif tidak akan dituliskan) sedangkan  $a_{1(2)}a_{2(1)}$  bertanda negatif atau  $-a_{1(2)}a_{2(1)}$ . Dari sini jelas terlihat dari bahwa definisi determinan untuk matriks dengan  $n = 2$  yang diberikan pada persamaan (29), tidak lain merupakan jumlah dari semua hasil kali elementer matriks tersebut yaitu  $a_{11}a_{22} + (-a_{12}a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  (tanda kurung tidak dituliskan).

Dari kasus untuk  $n = 2$ , terlihat bahwa jumlah hasil kali elementer yang dimiliki oleh matriks dengan order tersebut adalah sebanyak 2 buah. Secara umum untuk matriks berorde  $n$  terdapat  $n!$  buah hasil kali elementer.

Kini selanjutnya kita tinjau determinan untuk matriks berorde 3 berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (32)$$

Hasil kali elementer yang dimiliki oleh matriks tersebut banyaknya adalah 3! Atau 6 buah yaitu (buktikan!):

$$a_{11}a_{22}a_{33}, a_{12}a_{23}a_{31}, a_{13}a_{21}a_{32} \quad (33a)$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}, a_{11}a_{23}a_{32}, a_{12}a_{21}a_{33} \quad (33b)$$

Dalam kasus ini, yang diambil sebagai patokan dasar adalah urutan  $a_{11}a_{22}a_{33}$ . Ambil contoh hasil kali elementer  $a_{12}a_{23}a_{31}$ . Untuk mengubahnya menjadi bentuk dasar kembali dibutuhkan langkah sebanyak dua kali penukaran indeks kedua masing-masing elemen yaitu  $a_{1(2)}a_{2(3)}a_{3(1)} \rightarrow a_{1(2)}a_{2(1)}a_{3(3)} \rightarrow a_{1(1)}a_{2(2)}a_{3(3)}$ , dengan demikian permutasi hasil kali elementer tersebut adalah genap. Tinjau  $a_{13}a_{22}a_{31}$ , pada baris awal (33b), untuk mengubahnya menjadi bentuk dasar kembali dibutuhkan terdapat tiga langkah:  $a_{1(3)}a_{2(2)}a_{3(1)} \rightarrow a_{1(2)}a_{2(3)}a_{3(1)} \rightarrow a_{1(2)}a_{2(1)}a_{3(3)} \rightarrow a_{1(1)}a_{2(2)}a_{3(3)}$ , sehingga permutasinya adalah ganjil.

Selanjutnya dengan cara yang sama di dapatkan (silahkan buktikan) hasil kali elementer (33a) merupakan permutasi genap sedangkan (33b) adalah permutasi ganjil. Dengan demikian determinan dari matriks berorde 3 adalah:

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned} \quad (34)$$

Pengelompokan kembali persamaan (34) diperoleh:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (35)$$

atau:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (36)$$

Selain hasil pada persamaan (35), pengelompokan juga dapat dilakukan sehingga diperoleh:

$$\det(A) = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \quad (37)$$

atau:

$$\det(A) = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (38)$$

Ketiga determinan pada persamaan (36) dapat diperoleh dari determinan semula dengan mengabaikan baris dan kolom tertentu. Pola yang diperlihatkan oleh persamaan (36) untuk menyatakan nilai determinan matriks berorde 3 ini dapat diperluas untuk menghitung matriks berorde  $n > 3$ . Untuk maksud tersebut, kita perlu mempelajari dua rumusan pada pasal berikut.

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah dua matriks dengan orde yang sama, maka sifat penting berikut berlaku:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad (39)$$

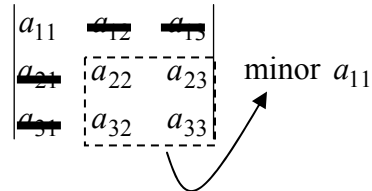
Perlu diingat bahwa *konsep determinan hanya berlaku bagi matriks bujur sangkar*.

### 5.2.1. Minor

Determinan orde dua dalam persamaan (36) dan (38) disebut *minor* dari elemen bersangkutan yang dikalikan. Misalkan untuk elemen  $a_{11}$ , pada persamaan (36),

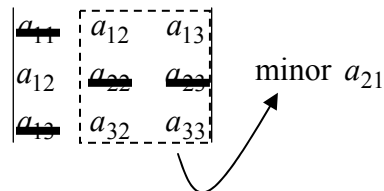
minornya adalah  $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  dan dapat diperoleh melalui cara seperti yang diilustrasikan

berikut ini:



Misalkan lagi untuk elemen  $a_{21}$  pada persamaan (38), minornya adalah  $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  yang

juga dapat diperoleh melalui cara seperti yang diilustrasikan berikut ini:



Secara umum dapat dinyatakan bahwa minor dari elemen  $a_{ij}$  sebuah matriks  $A$  didefinisikan sebagai determinan matriks yang tertinggal setelah baris ke  $i$  dan kolom ke  $j$  yang mengandung elemen  $a_{ij}$  dihapus.

### 5.2.2. Kofaktor

Terlihat pada persamaan (36) atau (38) tanda dari minor yang terkait dengan suatu elemen matriks dapat berharga positif atau negatif. Secara umum matriks minor tersebut dinamakan *kofaktor* dari elemen  $a_{ij}$  yang didefinisikan sebagai:

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \times \text{minor } a_{ij} \quad (40)$$

Berdasarkan rumusan kofaktor ini, persamaan (36) misalnya, dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\det(A) = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13} \quad (41)$$

dengan  $K_{11} = (-1)^{1+1} \times \text{minor } a_{11} = \text{minor } a_{11}$ ,  $K_{12} = (-1)^{1+2} \times \text{minor } a_{12} = -\text{minor } a_{12}$ , dan  $K_{13} = (-1)^{1+3} \times \text{minor } a_{13} = \text{minor } a_{13}$ .

*Contoh 3.9.* Hitunglah  $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ . Berdasarkan rumusan minor-

kofaktor di atas, kita dapat mengambil elemen pengali  $a_{ij}$  dari sebarang dari baris atau kolom tertentu dan kemudian mencari kofaktornya. Misalkan kita ambil sebagai elemennya adalah elemen pada kolom ke tiga yaitu  $a_{13} = -1$ ,  $a_{23} = 1$ ,  $a_{33} = 1$ . Maka berturut-turut kofaktornya adalah (buktikan!):

$$K_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad K_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{dan} \quad K_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\text{sehingga diperoleh: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)K_{13} + (1)K_{23} + (1)K_{33} = -9.$$

### 5.3. Aturan Cramer

Aturan Cramer adalah suatu cara untuk memecahkan persamaan sistem linier  $AX = B$ , dengan  $A$  adalah matriks bujur sangkar berorde  $n$  dan  $\det(A) \neq 0$ , sedangkan  $X$  adalah matriks kolom berukuran  $n \times 1$  yang berisikan  $n$  buah variabel  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  yang tidak diketahui dan  $B$  juga merupakan matriks kolom berukuran  $n \times 1$ .

Berdasarkan aturan ini, maka solusi dari sistem persamaan linier tersebut dapat diperoleh melalui rumusan berikut:

$$x_i = \frac{\det(U_i)}{\det(A)} \quad (42)$$

Dimana  $U_i$  adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan kolom ke  $i$  dari matriks  $A$  dengan matriks kolom  $B$ .

Untuk membuktikan aturan ini, Tinjau persamaan linier:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \quad (43)$$

Matriks yang terkait dengan sistem persamaan ini adalah  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Kalikan

bagian atas persamaan tersebut dengan  $a_{22}$  dan bagian bawah dengan  $a_{12}$ , kemudian

kurangkan kedua diperoleh:  $\frac{a_{22}(a_{11}x + a_{12}y = b_1) - a_{12}(a_{21}x + a_{22}y = b_2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2}$ , sehingga solusi untuk

variabel  $x$  adalah:

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (44).$$

Dapat dibuktikan dengan cara yang sama bahwa untuk variabel  $y$  solusinya adalah:

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (45).$$

Sekarang kita tinjau solusi keduanya berdasarkan aturan Cramer, dimana matriks  $U_i$  yang terkait dengan sistem persamaan linier yang kita tinjau adalah:

$$U_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad (46a)$$

$$U_y = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \quad (46b)$$

sehingga diperoleh :  $x = \frac{\det(U_x)}{\det(A)} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$  dan  $y = \frac{\det(U_y)}{\det(A)} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ ,

yang menghasilkan solusi yang sama dengan persamaan (44) dan (45).

Kita telah membuktikan bahwa aturan Cramer dapat diterapkan untuk memperoleh solusi bagi sistem persamaan linier dengan dua variabel. Pembaca dapat meyakini diri bahwa aturan ini pun berlaku untuk sistem dengan  $n$  buah variabel.

*Contoh 3.10.* Selesaikan persamaan linier (23) dengan menggunakan aturan Cramer. Telah diperoleh pada contoh 3.9. bahwa matriks  $A$  yang diberikan pada persamaan (24) memiliki determinan  $\det(A) = -9$ . Dari sistem tersebut, diperoleh:

$$U_x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U_y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } U_z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ dengan masing-masing}$$

determinan adalah  $\det(U_x) = -27$ ,  $\det(U_y) = 18$  dan  $\det(U_z) = -18$ . Dari sini kita

$$\text{peroleh: } x = \frac{\det(U_x)}{\det(A)} = \frac{-27}{-9} = 3, y = \frac{\det(U_y)}{\det(A)} = \frac{18}{-9} = -2, z = \frac{\det(U_z)}{\det(A)} = \frac{-18}{-9} = 2 \text{ sama}$$

seperti yang diperoleh dengan menggunakan metode reduksi pada pasal 5.1.

## 6. Matriks Invers

Kembali kita tinjau sistem persamaan linier  $AX = B$ . Selain dari cara reduksi baris dan cara aturan Cramer yang telah dibahas pada pasal-pasal terdahulu, kita juga dapat memecahkannya dengan mengalikan terlebih dahulu persamaan tersebut dengan matriks invers  $A^{-1}$  dari kiri sehingga persamaan linier tersebut menjadi:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad (47)$$

Jelas terlihat, agar sistem tersebut dapat dipecahkan, maka syarat yang harus dipenuhi adalah  $A^{-1}A = I$ , dimana  $I$  adalah matriks identitas dengan  $\det(I) = 1$  yang memiliki sifat komutatif  $AI = IA$ . Berdasarkan persamaan (39),  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ , sehingga dapat

disimpulkan bahwa syarat agar sebuah matriks memiliki invers, maka  $\det(A) \neq 0$ .

Sebelum kita membahas cara mencari matriks inverse tersebut, akan terlebih dahulu dibahas konsep mengenai matriks identitas dan matriks transpos bagian berikut.

### 6.1. Matriks Identitas dan Matriks Transpos

Sebuah matriks identitas atau matriks satuan, didefinisikan sebagai matriks bujur sangkar dimana hanya bagian diagonalnya yang tidak nol dan semua elemen diagonal

tersebut berharga 1. Contoh untuk matriks bujur sangkar berorde 3, maka matriks satuannya adalah:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Matriks transpos dari matriks  $A$  dituliskan sebagai  $A^T$ , dan dapat dibangun dengan menukar posisi indeks dari masing-masing elemen,  $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$ . Misalkan untuk

matriks berorde 2,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , maka matriks transposnya adalah  $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

### 6.2. Penentuan Matriks Invers dengan Menggunakan Metode Reduksi Baris

Seperti halnya yang telah kita pelajari dalam mencari pemecahan sistem persamaan linier melalui metode reduksi baris pada pasal 5.1, maka dengan cara yang sama kita dapat pula menerapkannya untuk mencari matriks invers yang ingin diketahui dari matriks  $A$ .

Misalkan matriks invers yang dimaksud  $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{pmatrix}$ . Maka

perkalian:  $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  akan menghasilkan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} \\ a_{21}^{-1} \\ a_{31}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (49a)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12}^{-1} \\ a_{22}^{-1} \\ a_{32}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (49b)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13}^{-1} \\ a_{23}^{-1} \\ a_{33}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (49c)$$

Terlihat ketiga persamaan (49) di atas merupakan persamaan linier  $AX = B$ . Dengan demikian mencari elemen-elemen matriks invers tersebut dapat dilakukan dengan metode reduksi baris yang telah kita bahas sebelumnya.

Selanjutnya berdasar persamaan (49) kita dapat membentuk matriks diperluas  $(A | I)$ . Dengan melakukan operasi reduksi baris, yang tertuang pada tiga langkah di pasal 5.1, maka matriks diperluas tersebut akan tereduksi menjadi  $(I | A^{-1})$ , dimana pada bagian sebelah kanan matriks diperluas tersebut kita dapatkan matriks invers yang dimaksud.

*Contoh 3.11.* Tentukan invers matriks pada contoh 3.9.

Matriks diperluas untuk matriks tersebut adalah: 
$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
. Selanjutnya

dengan melakukan kembali 13 langkah yang ditempuh pada pasal 5.1, diperoleh:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2/9 & 8/9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 4 & -16/9 & 8/9 & 4/3 \end{array} \right)$$

Selanjutnya lakukan kembali langkah-langkah tambahan berikut ini:

Langkah 14. Kalikan baris 1 dengan  $-1/2$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2/9 & 8/9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 4 & -16/9 & 8/9 & 4/3 \end{array} \right)$$

Langkah 15. Kalikan baris 2 dengan  $-1/2$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 & -4/9 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4 & -16/9 & 8/9 & 4/3 \end{array} \right)$$

Langkah 16. Kalikan baris 3 dengan  $1/4$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 & -4/9 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/9 & 2/9 & 1/3 \end{array} \right)$$



Sehingga dengan demikian matriks invers  $A^{-1}$  adalah  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/9 & -4/9 & 1/3 \\ -4/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}$

## 6.2. Penentuan Matriks Invers dengan Menggunakan Metode Determinan

Metode ini didasarkan pada kenyataan bahwa sebuah matriks  $A$  memiliki invers, jika dan hanya jika determinannya tak sama dengan nol,  $\det(A) \neq 0$ . Mengingat penurunannya agak panjang, maka kita hanya akan membahas langkah-langkah perhitungannya saja.

Untuk mengiilustrasikannya, tinjau perhitungan untuk mencari invers dari matriks  $A$  yang berorde 3. Langkah pertama adalah dengan membentuk matriks kofaktor dari matriks  $A$ , yaitu matriks yang elemennya adalah kofaktor dari setiap elemen matriks tersebut:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \quad (50)$$

dengan  $K_{ij}$  diberikan oleh persamaan (40).

Setelah kita peroleh matriks kofaktor tersebut, selanjutnya kita cari matriks transposnya:

$$\text{cof}(A)^T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Matriks transpos kofaktor ini secara khusus disebut sebagai matriks *adjoint* dari matriks  $A$ :

$$\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^T \quad (52)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan matriks invers yang dimaksud kita gunakan rumusan:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \quad (53)$$

*Contoh 3.12.* Tentukan invers dari matriks pada contoh 3.11, dengan menggunakan metode determinan. Dengan menggunakan persamaan (40) untuk mencari

$$\text{kofaktor diperoleh: } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks adjointnya adalah:  $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ . Dari contoh 3.9 diketahui

bahwa  $\det(A) = -9$ , dengan demikian diperoleh:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/9 & -4/9 & 1/3 \\ -4/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ sesuai dengan diperoleh}$$

dengan menggunakan metode reduksi baris.

Berdasarkan rumusan matriks invers ini, kita kini dapat pula memecahkan

$$\text{persamaan linier (24), dimana } X = A^{-1}B \text{ dan } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/9 & -4/9 & 1/3 \\ -4/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

seperti yang telah diperoleh sebelumnya dari pasal 5.1.

## 7. Matriks-Matriks Khusus

Secara khusus kita telah membahas dua matriks khusus pada pasal 6, yang sering kita jumpai penggunaannya dalam Fisika, yaitu matriks identitas  $I$  dan matriks transpos  $A^T$  serta matriks adjoint  $\text{adj}(A)$ . Beberapa matriks khusus adalah:

1. *Matriks nol*, yaitu matriks dengan semua elemennya berharga nol dan biasanya disimbolkan dengan matriks  $0$ .
2. *Matriks singular*, yaitu matriks bujur sangkar dengan determinan nol. Semua matriks yang bukan bujur sangkar juga disebut matriks singular karena tidak memiliki determinan.
3. *Matriks identitas  $I$* , matrik dengan semua elemen diagonalnya 1 dan elemen selain diagonal nol. biasanya secara singkat direpresentasikan oleh suatu kuantitas yang dinamakan delta *kronecker*  $\delta_{ij}$  yang didefinisikan memiliki sifat berikut:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (54)$$

4. *Matriks transpos*  $A^T$ , matriks yang diperoleh dengan menukar elemen baris matriks  $A$  menjadi kolom dan sebaliknya.
5. *Matriks invers*  $A^{-1}$ , adalah matriks yang memenuhi kondisi  $AA^{-1} = I$ .
6. *Matriks transpose konjugat*  $A^\dagger = (A^T)^*$  (baca: *A dagger*), yang diperoleh dengan mentranspos matriks  $A$  dan mengkompleks konjugat-kan.
7. *Matriks adjoint*  $\text{adj}(A)$ , matriks yang elemennya merupakan kofaktor dari setiap elemen matriks  $A$ .

Berikut adalah beberapa sifat khusus matriks yang juga sering dijumpai dalam Fisika beserta contohnya:

1. Jika  $A = A^T$ , maka dikatakan matriks tersebut adalah *matriks simetrik*.

Contoh:  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = A^T$

2. Jika  $A = -A^T$ , maka dikatakan matriks tersebut adalah *matriks skew-simetrik*

Contoh:  $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$  sehingga  $A = -A^T$ . Sebagai catatan, semua matriks skew-simetrik memiliki elemen diagonal nol.

3. Jika  $A = A^\dagger$ , maka matriks tersebut dinamakan *matriks hermitian*.

Contoh:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = A$ .

4. Jika  $A^T = A^{-1}$ , maka matriks tersebut adalah *matriks orthogonal*.

Contoh:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$  (buktikan!)

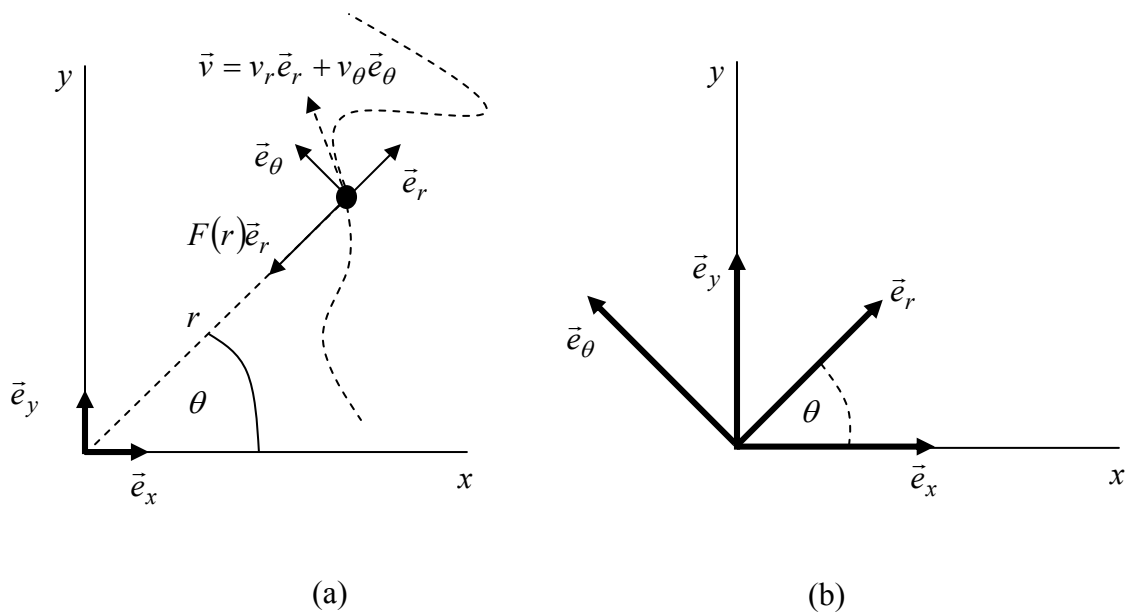
5. Jika  $A^\dagger = A^{-1}$ , maka matriks tersebut dinamakan *matriks uniter*.

Contoh:  $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$  (buktikan!)

## 8. Contoh Penerapan dalam Fisika

Konsep mengenai vektor dan matriks di dalam Fisika memainkan peranan yang cukup sentral, karena hampir dipakai disemua cabang Fisika. Sebagai contoh, dalam mekanika, konsep vektor atau matriks secara umum dipakai untuk menggambarkan dinamika gerak benda dalam tiga dimensi, misalnya untuk benda yang bergerak secara rotasi.

Tinjau misalnya gerak sebuah partikel yang berada dalam pengaruh gaya sentral  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ , seperti gaya gravitasi misalnya. Pada umumnya gerak tersebut dapat berupa lintasan yang mengelilingi suatu titik tempat sumber gaya tersebut. Contoh misalnya gerak planet mengelilingi matahari. Bagi partikel dalam pengaruh gaya sentral tersebut, untuk lebih mempermudah penanganan, dinamikanya lazim direpresentasikan dalam sistem koordinat polar, dimana jarak dari suatu partikel dan sudutnya terhadap suatu kerangka acuan tetap digunakan sebagai besaran yang digunakan untuk menggambarkan perilaku geraknya, seperti yang diilustrasikan dalam Gambar 7(a).



Gambar 7

Misalkan kecepatan dari partikel pada Gambar 7(a) adalah:

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta \quad (55)$$

dimana  $\vec{e}_r$  dan  $\vec{e}_\theta$  masing-masing adalah vektor satuan dalam sistem koordinat polar yang diberikan pada Gambar 7(b), sedangkan  $v_r$  dan  $v_\theta$  adalah komponen vektor dalam sistem koordinat tersebut. Vektor satuan  $\vec{e}_r$  dan  $\vec{e}_\theta$  adalah vektor-vektor satuan yang selalu berubah sesuai dengan posisi partikel tersebut.

Bagi sistem koordinat kartesis dengan vektor satuan tetap  $\vec{e}_x$  dan  $\vec{e}_y$ , kita dapat mencari hubungan keduanya dengan  $\vec{e}_r$  dan  $\vec{e}_\theta$  dalam koordinat polar. Berdasarkan Gambar 7(b) dan  $|\vec{e}_r| = 1$ , kita dapat melihat hubungan berikut:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_y \sin \theta \quad (56)$$

Untuk mendapatkan hubungan bagi vektor satuan  $\vec{e}_\theta$ , kita misalkan  $\vec{e}_\theta = -a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$ , dan dengan memanfaatkan kenyataan bahwa  $\vec{e}_\theta \perp \vec{e}_r$  atau  $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = 0$  dan  $|\vec{e}_\theta| = 1$ , didapatkan persamaan:

$$-a \cos \theta + b \sin \theta = 0 \quad (57a)$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (57b)$$

Dari persamaan (57a) diperoleh:  $b = a \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ , masukkan kembali ke persamaan (57b)

$$\text{diperoleh } a^2 \left( 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) = a^2 \left( \frac{\overset{=1}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{\sin^2 \theta} \right) = 1, \text{ sehingga } a = \sin \theta \text{ dan } b = \cos \theta.$$

Dengan demikian kita peroleh hubungan:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_y \sin \theta \\ \vec{e}_\theta &= -\vec{e}_x \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta \end{aligned} \quad (58)$$

Bentuk persamaan (59) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} \quad (59)$$

dimana matriks  $R$  pada persamaan:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (60)$$

merupakan matriks yang bersifat orthogonal (buktikan!), dimana

$$R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (61).$$

Dari sini dapat pula diperoleh invers persamaan (60):

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{pmatrix} \quad (62)$$

Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa untuk memperoleh komponen kecepatan dalam sistem kartesis dapat diperoleh melalui persamaan berikut:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} \quad (63)$$

Sebagai contoh sederhana, kita tinjau kasus gerak melingkar beraturan dengan kelajuan tetap dengan:

$$v_r = 0 \quad (64a)$$

$$v_\theta = r\omega \quad (64b)$$

Berdasarkan persamaan (63), maka diperoleh komponen gerak tersebut dalam koordinat kartesis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \end{pmatrix} \\ &= r\omega \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

Atau dalam bahasa vektor:

$$\vec{v} = -\vec{e}_x r\omega \sin \theta + \vec{e}_y r\omega \cos \theta \quad (66)$$

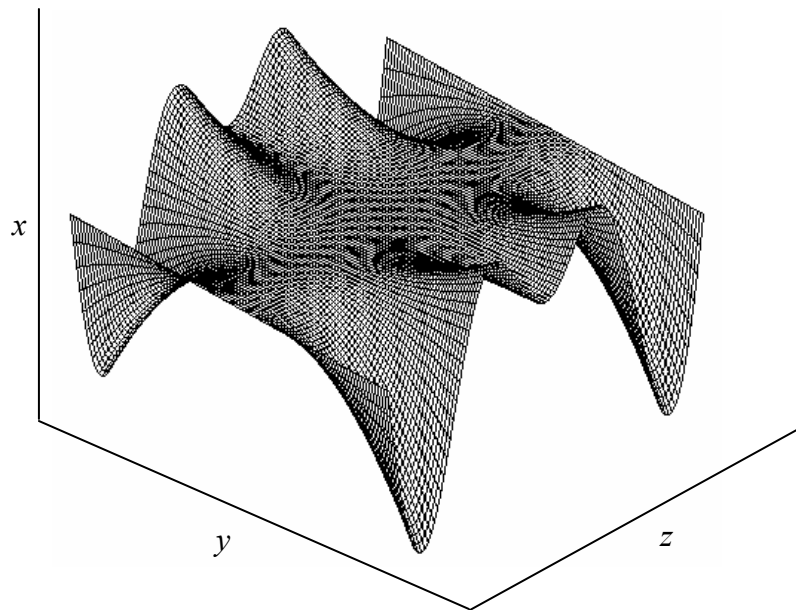
## BAB 4

### TURUNAN DAN DIFERENSIASI PARSIAL

#### 1. Pendahuluan

Dalam bab ini kita akan membahas konsep mengenai diferensiasi parsial terhadap fungsi-fungsi dari beberapa variabel bebas. Fungsi dengan variabel banyak sering dijumpai penggunaannya dalam Fisika ketika berkaitan dengan suatu gejala yang melibatkan beberapa buah besaran. Misalnya ketika kita membahas perilaku suatu gas, kita dapat mengkajinya lewat persamaan keadaan gas tersebut yang biasanya merupakan fungsi dari besaran volume, tekanan dan temperatur. Kalkulus merupakan perangkat analisa yang kita butuhkan untuk untuk mengkaji dinamika dari suatu sistem fisis yang melibatkan beberapa besaran seperti dalam kasus perilaku gas di atas karena ia merupakan bagian dari Matematika yang berhubungan dengan laju perubahan suatu fungsi terhadap variabelnya.

Seperti yang pernah disinggung pada Bab 3, bahwa fungsi dengan banyak variabel seperti  $f(x, y, z) = 0$  mendefinisikan permukaan dalam ruang tiga dimensi, seperti yang dicontohkan pada Gambar 1 untuk fungsi  $z - 2xy^2 \sin(2x) = 0$ .



Gambar 1

Secara umum, fungsi  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  dengan  $n$  buah variabel juga membentuk suatu permukaan yang disebut permukaan-hiper (*hyper-surface*), tetapi kita tidak dapat menggambarkannya dalam bentuk visual karena keterbatasan dimensi yang kita miliki.

## 2. Turunan dan Diferensial Parsial Fungsi Banyak Variabel

### 2.1. Definisi Turunan Parsial

Misalkan kita memiliki sebuah fungsi  $A(x)$ , dimana  $A$  merupakan sebuah besaran turunan yang merupakan fungsi dari besaran pokok  $x$ . Laju perubahan  $A$  terhadap  $x$  didefinisikan sebagai:

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

dengan  $\Delta x$  yang diambil relatif cukup besar. Turunan atau diferensial dari fungsi  $A(x)$  terhadap  $x$  yang dituliskan sebagai  $A'(x) = \frac{dA(x)}{dx}$  diperoleh jika kita mengambil  $\Delta x \rightarrow 0$  sehingga:

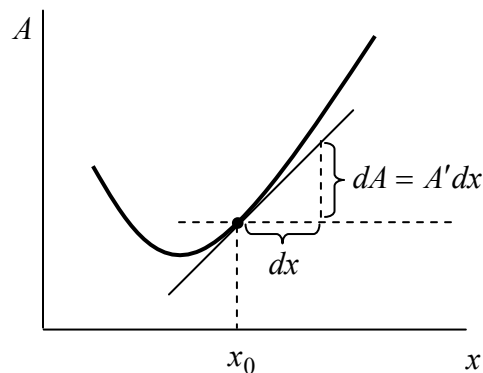
$$A' = \frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} \quad (2)$$

Secara geometri, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 2, turunan dari fungsi tersebut di suatu titik merupakan kemiringan garis lurus yang menyinggung titik tersebut.

Di titik  $x = x_0$  pada Gambar 4, kemiringannya diberikan oleh  $\left. \frac{dA}{dx} \right|_{x=x_0}$ . Perhatikan,

berdasarkan persamaan (2), kita dapat menuliskan:

$$dA = A' dx \quad (3)$$

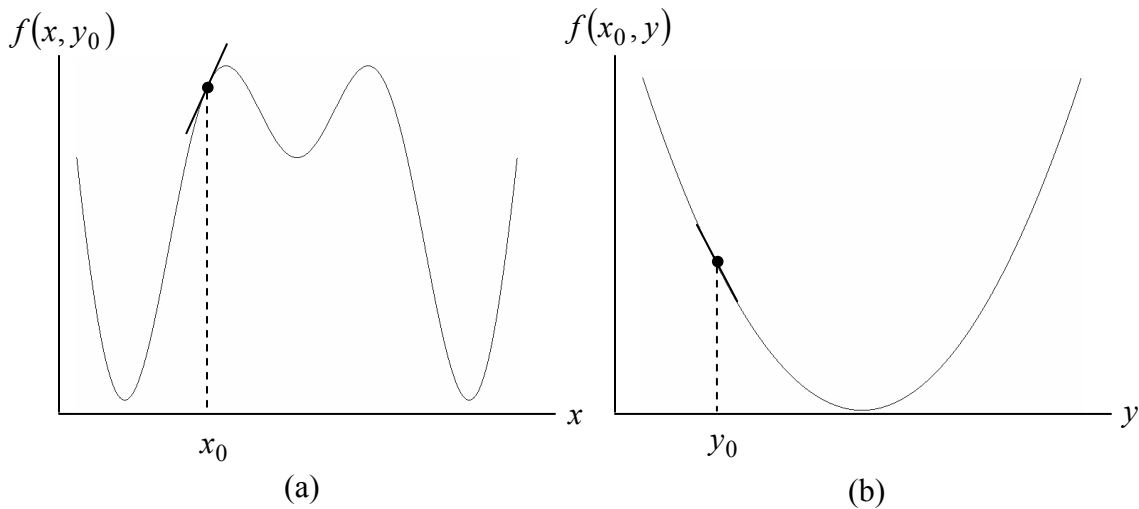


Gambar 2



Untuk fungsi dengan variabel banyak, misalkan  $f = f(x, y)$ , didefinisikan konsep turunan parsial,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , yaitu turunan  $f$  terhadap  $x$  dengan menganggap  $y$  konstan, dan  $\frac{\partial f}{\partial y}$  yaitu turunan  $f$  terhadap  $y$  dengan menganggap  $x$  konstan.

Secara geometri turunan ini menyatakan kemiringan di suatu titik  $(x_0, y_0)$  dari kurva proyeksi fungsi tersebut pada salah satu bidang proyeksi. Misalkan untuk fungsi yang diberikan pada Gambar 1, proyeksi fungsi tersebut pada bidang  $(x, f)$  di titik  $y = y_0$ , dan  $(y, f)$  di titik  $x = x_0$  masing-masing diberikan pada Gambar 3(a) dan 3(b) berturut-turut, maka kemiringan garis singgung masing-masing kurva proyeksi tersebut pada titik  $(x_0, y_0)$  diberikan oleh turunan parsial:  $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}$  dan  $\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{y=y_0}$ . Perhatikan bahwa untuk turunan parsial kita tidak menggunakan notasi "d", tetapi menggunakan notasi "∂" (baca: do) yang menyatakan turunan dari fungsi  $f$  terhadap salah satu variabel dengan menganggap variabel lain konstan.



Gambar 3

Selain dari bentuk penulisan turunan parsial seperti yang diberikan di atas, dalam beberapa buku teks kita juga akan menjumpai beberapa bentuk lain semisal:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \partial_x f \equiv f_x \equiv D_x f \tag{4}$$

Untuk turunan parsial dengan orde lebih tinggi berlaku:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \quad (5)$$

Contoh 4.1. Jika  $f = x^2 + 2xy^3 + y^2$ , Tentukan:  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ .

$$(i) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + 2xy^3 + y^2)}{\partial x} = 2x + 2y^3, \quad (ii) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial(2x + 2y^3)}{\partial y} = 6y^2.$$

$$(iii) \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial(6y^2)}{\partial y} = 12y.$$

## 2.2. Uraian Taylor Fungsi Banyak Variabel

Seperti halnya fungsi dengan satu variabel yang dapat diuraikan atas deret pangkat sebagaimana yang telah kita bahas di Bab 1, maka untuk fungsi banyak variabel pun kita dapat melakukan hal yang sama. Kita akan membatasi diri untuk fungsi dengan dua variabel  $f = f(x, y)$ . Tinjau uraian fungsi tersebut dalam bentuk deret pangkat berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_{00} + a_{01}(y-b) + a_{02}(y-b)^2 + \dots + a_{10}(x-a) + \\ &\quad a_{11}(x-a)(y-b) + a_{12}(x-a)(y-b)^2 \quad (6) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} (x-a)^n (y-b)^m \end{aligned}$$

Untuk mencari koefisien  $a_{nm}$  pada persamaan (6), kita dapat menggunakan cara yang persis seperti yang dilakukan untuk kasus satu variabel. Pertama kita cari dahulu untuk koefisien  $a_{00}$  dan dengan mudah kita peroleh jika kondisi  $x = a$  dan  $y = b$  dipenuhi, yang mengakibatkan:

$$a_{00} = f(a, b) \quad (7)$$

Untuk  $a_{01}$  kita dapat memperolehnya dengan mencari turunan parsial persamaan (6) terhadap variabel  $y$  dan mengevaluasinya kembali pada titik  $(x = a, y = b)$ :

$$a_{01} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} \quad (8)$$

Sekarang kita cari koefisien  $a_{12}$  dengan jalan menurunkan parsial terhadap  $x$  satu kali dan terhadap  $y$  dua kali, sehingga didapatkan:

$$a_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x=a, y=b} \quad (9)$$

Koefisien-koefisien yang lain pada prinsipnya dapat dicari dengan cara yang sama. Tanpa harus memasuki detail perhitungan, berikut diberikan ungkapannya dalam bentuk yang kompak:

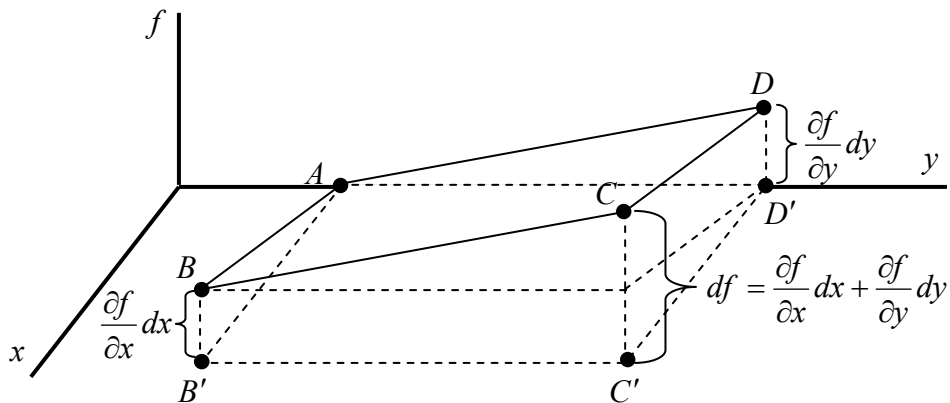
$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} f(x, y) \Big|_{x=a, y=b} (x-a)^n (y-b)^m \quad (10)$$

### 2.3. Diferensial Total

Misalkan kembali kita memiliki fungsi  $f = f(x, y)$ , maka diferensial (selisih) total fungsi tersebut didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} df &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (11)$$

Ungkapan  $\frac{\partial f}{\partial x} dx$  dan  $\frac{\partial f}{\partial y} dy$  dalam persamaan (11) berturut-turut merupakan *diferensial parsial* fungsi  $f$  dalam arah  $x$  dan  $y$ .



Gambar 4

Penjelasan secara geometri makna dari diferensiasi total  $df$  pada persamaan (11) dapat dilihat pada Gambar 4. Misalkan titik  $A$  adalah  $f(x, y)$ , sedangkan titik  $C$  adalah  $f(x + dx, y + dy)$  dengan  $dx, dy \rightarrow 0$ , yang keduanya berada pada permukaan yang dibentuk oleh fungsi tersebut. Garis  $\overline{AB}$  merupakan garis singgung pada kurva proyeksi di bidang  $(x, f)$ , dan seperti halnya persamaan (3), maka panjang garis  $\overline{BB'} = \frac{\partial f}{\partial x} dx$ . Sementara itu, garis  $\overline{AD}$  merupakan garis singgung pada kurva proyeksi di bidang  $(y, f)$  dan panjang garis  $\overline{DD'} = \frac{\partial f}{\partial y} dy$ . Dari sini terlihat bahwa bidang  $ABCD$ , yang didalamnya terdapat garis  $\overline{AB}$  dan  $\overline{AD}$ , tidak lain adalah bidang datar yang menyinggung titik  $A$ . Dipihak lain, karena titik  $A$  dan  $C'$  berada pada bidang  $AB'C'D'$  yang paralel dengan bidang  $(x, y)$ , maka panjang garis  $\overline{CC'} = df$  merupakan diferensiasi total dari fungsi yang dimaksud, dan dari Gambar 4 diketahui bahwa  $\overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$  atau dengan kata lain  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ .

Secara umum, untuk fungsi dengan  $n$  – buah variabel,  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , maka diferensiasi total fungsi tersebut diberikan oleh:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (12)$$

*Contoh 4.2.* Jika  $f = e^y + \sin(xy)$ , tentukan  $df$ . Sebelumnya mencari diferensial total dari fungsi  $f$  tersebut, kita cari terlebih dahulu turunan parsial terhadap variabel  $x$  dan  $y$ .  $\frac{\partial f}{\partial x} = y \sin xy$  dan  $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y + x \sin xy$ , sehingga dengan demikian diperoleh:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (y \sin xy) dx + (e^y + x \sin xy) dy.$$

### 3. Aturan Rantai dan Turunan Implisit

Dalam beberapa kasus, kita akan menjumpai bahwa variabel suatu fungsi yang merepresentasikan suatu sistem merupakan fungsi dari variabel lainnya, atau kita juga menemui kasus dimana suatu fungsi tidak dinyatakan secara eksplisit, sehingga dengan

mudah dapat dicari turunannya. Berikut kita akan membahas kasus-kasus dimana turunan dari suatu fungsi tidak dapat langsung diperoleh dengan mudah.

### 3.1. Aturan Rantai

Misalkan terdapat suatu fungsi dimana variabelnya merupakan fungsi dari variabel lainnya. Tinjau fungsi:

$$f = f(u), \quad u = u(h), \quad h = h(x) \quad (13)$$

dan kita diminta untuk mencari turunan  $f$  terhadap  $x$ ,  $\frac{df}{dx}$ .

Pertama kita cari diferensial total dari fungsi-fungsi  $f$ ,  $u$  dan  $h$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du \quad (14a)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial h} dh \quad (14b)$$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (14c)$$

Gabungkan ketiga persamaan (14) diatas diperoleh:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (15)$$

Bagi kedua ruas pada persamaan (15) dengan  $dx$  diperoleh:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (16)$$

yang merupakan turunan  $f$  terhadap  $x$ . Cara memperoleh turunan dari suatu fungsi yang variabelnya merupakan fungsi variabel lain ini dinamakan *aturan rantai*.

Selanjutnya kita tinjau kembali fungsi semacam persamaan (13), tetapi dengan:

$$f = f(u, w), \quad u = u(x, y), \quad w = w(x, y) \quad (17)$$

maka diferensial total fungsi  $f$ ,  $u$  dan  $w$  adalah:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial w} dw \quad (18a)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (18b)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (18c)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (18b) dan persamaan (18c) ke dalam persamaan (18a) diperoleh:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \quad (19)$$

Perlu dicatat bahwa persamaan (18a) merupakan diferensial total  $f$  terhadap  $u$  dan  $w$ , sedangkan persamaan (19) merupakan diferensial total  $f$  terhadap  $x$  dan  $y$ .

*Contoh 4.3.* Misalkan  $f = xy$ ,  $x = \cos(s+t)$  dan  $y = \sin(s-t)$ . Tentukan  $\frac{\partial f}{\partial s}$  dan  $\frac{\partial f}{\partial t}$ . Berdasarkan persamaan (18):  $df = \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right)}_{\partial f / \partial s} ds + \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right)}_{\partial f / \partial t} dt$ .

Turunan-turunan parsial yang diperlukan:  $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ ,  $\frac{\partial x}{\partial s} = -\sin(s+t)$ ,

$\frac{\partial x}{\partial t} = -\sin(s+t)$ ,  $\frac{\partial y}{\partial s} = \cos(s-t)$  dan  $\frac{\partial y}{\partial t} = -\cos(s-t)$ . Untuk mencari turunan parsial  $f$

terhadap  $s$ , berlaku  $dt = 0$ , sehingga  $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = x \cos(s-t) - y \sin(s+t)$ .

Sedangkan untuk mencari turunan parsial fungsi  $f$  terhadap variabel  $t$  diambil  $ds = 0$

(mangapa?), sehingga  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -x \cos(s-t) - y \sin(s+t)$ .

### 3.2. Turunan Implisit

Perhatikan persamaan di bawah ini:

$$e^y + \sin x = 1 \quad (20)$$

Untuk mencari ungkapan  $\frac{dy}{dx}$ , langkah konvensional yang harus kita tempuh adalah menjadikan persamaan tersebut berbentuk:

$$y = \ln(1 - \sin x) \quad (21)$$

Kemudian baru kita cari turunannya dengan menggunakan aturan rantai (16), kita dapatkan hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left( \frac{d(\ln(1 - \sin x))}{d(1 - \sin x)} \right) \left( \frac{d(1 - \sin x)}{d \sin x} \right) \left( \frac{d \sin x}{dx} \right) \\ &= \left( \frac{1}{1 - \sin x} \right) (-1) (\cos x) \\ &= \frac{\cos}{\sin x - 1}\end{aligned}\quad (22)$$

Kini bandingkan dengan cara berikut. Pertama kita cari diferensial total dari masing-masing fungsi yang terlibat di dalam persamaan tersebut:

$$de^y = \frac{\partial e^y}{\partial y} dy = e^y dy \quad (23)$$

dan

$$d(\sin x) = \frac{\partial(\sin x)}{\partial x} dx = \cos x dx \quad (24)$$

sehingga diferensiasi total persamaan (19) menjadi:

$$d(e^y) + d(\sin x) = e^y dy + \cos x dx = 0 \quad (25)$$

Ruas kanannya menjadi nol karena  $d(1) = 0$ . Selanjutnya dari persamaan (24) diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y} \quad (25)$$

Sementara dari persamaan (20) kita peroleh  $e^y = 1 - \sin x$ , sehingga akhirnya didapatkan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \quad (26)$$

Sama seperti yang diperoleh dengan cara konvensional.

Cara mencari turunan yang baru saja kita bahas ini dinamakan cara turunan implisit. Secara umum jika kita memiliki fungsi  $f(x, y) = c$ , dimana  $c$  adalah sebuah konstanta, dengan diferensial totalnya diberikan oleh:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (27)$$

Maka untuk mencari turunan  $y$  terhadap  $x$  dapat dilakukan melalui hubungan berikut:

$$\frac{dy}{dx} = -\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) / \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (28)$$

Pada contoh persamaan (20), kita kebetulan bertemu dengan persamaan implisit  $f(x, y) = c$  yang dapat diubah menjadi bentuk persamaan eksplisit  $y = g(x)$ . Turunan implisit ini akan menjadi penting, manakala kita berhadapan dengan persamaan implisit yang tidak dapat diubah menjadi persamaan eksplisit.

*Contoh 4.4.* Misalkan  $y^2 + e^y = 2x$ , tentukan  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . Tinjau diferensial total persamaan tersebut:  $(2y + e^y)dy = 2dx$ , sehingga diperoleh: (i)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y + e^y}$  atau (ii)

$\frac{dy}{dx}(2y + e^y) - 2 = 0$ . Untuk turunan kedua  $y$  terhadap  $x$ , turunkan persamaan (ii)

terhadap  $x$  yaitu:  $\frac{d}{dx} \left[ \frac{dy}{dx}(2y + e^y) - 2 \right] = 0$ , sehingga  $\frac{d^2y}{dx^2}(2y + e^y) + \frac{dy}{dx} \frac{d(2y + e^y)}{dx} =$

$\frac{d^2y}{dx^2}(2y + e^y) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ . Dengan mensubstitusikan persamaan (i)

diperoleh:  $\frac{d^2y}{dx^2}(2y + e^y) + 2\left(\frac{2}{2y + e^y}\right)^2 + e^y\left(\frac{2}{2y + e^y}\right)^2 = 0$  dan sebagai hasil akhir

didapatkan:  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8 + 4e^y}{(2y + e^y)^3}$ .

#### 4. Masalah Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi

Dalam Fisika, mencari nilai maksimum atau minimum (disebut juga nilai ekstrim) dari suatu fungsi yang menggambarkan dinamika suatu sistem sering kali dibutuhkan untuk mengetahui karakteristik dari sistem tersebut. Misalnya kita ingin mengetahui nilai-nilai tekanan atau temperatur kritis yang terkait dengan nilai maksimum atau minimum energi dalam dari sebuah sistem termodinamika sehingga kita bisa mengetahui fase-fase-nya.

Jika ketika kita mencari titik-titik ekstrim tersebut terdapat kaitan antara variabel-variabel yang terlibat, maka dikatakan sebagai nilai ekstrim dengan kendala (*constraint*). Sedangkan jika diantara variabel-variabel tersebut tidak terdapat hubungan lain, maka dikatakan sebagai nilai ekstrim tanpa kendala.



#### 4.1. Nilai Ekstrim Tanpa Kendala

##### 4.1.1. Fungsi dengan Satu Variabel

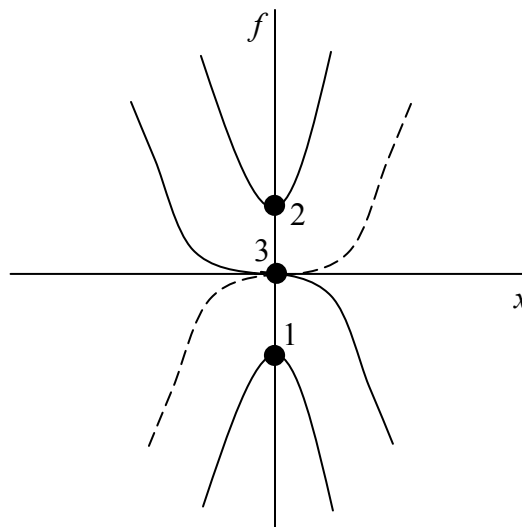
Karena turunan dari suatu fungsi pada dasarnya adalah laju perubahan fungsi tersebut terhadap variabelnya dan juga dapat diartikan sebagai kemiringan dari kurva/permukaan yang ditinjau. Untuk fungsi dengan satu variabel titik-titik dengan nilai ekstrim dari fungsi tersebut dapat dicari melalui kondisi:

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad (29)$$

Pada titik ini kemiringan dari kurva berubah dari positif menjadi negatif atau dari negatif menjadi positif. Titik-titik ekstrim tersebut dapat berupa maksimum atau minimum. Misalkan dari persamaan (29) kita mendapatkan titik ekstrim  $x = x_0$  yang dimaksudkan, maka titik tersebut maksimum atau minimum dapat ditentukan berdasarkan turunan kedua yang dievaluasi pada titik ekstrim tersebut:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0, \text{ Titik Minimum} \quad (30a)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} < 0, \text{ Titik Maksimum} \quad (30b)$$



Gambar 5

Pada titik maksimum, kemiringan kurva berubah dari positif menjadi negatif dan sebaliknya pada titik minimum berubah dari negatif menjadi positif. Sedangkan jika:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 0 \quad (31)$$

maka titik ekstrim tersebut disebut titik belok. Dicontohkan pada Gambar 5, titik-titik maksimum (titik 1), minimum (titik 2) dan belok (titik 3).

#### 4.1.2 Fungsi dengan Dua Variabel

Tinjau fungsi  $f(x, y, z) = 0$  yang dapat dinyatakan dalam ungkapan  $z = f(x, y)$  dan mendefinisikan sebuah permukaan dalam ruang tiga dimensi. Titik-titik ekstrim pada permukaan tersebut dapat dicari dengan memecahkan secara simultan kondisi berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (32a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (32b)$$

Misalkan  $(x_0, y_0)$  adalah titik ekstrim yang dimaksud, maka untuk menentukan sifatnya didefinisikan suatu kuantitas yang disebut *Hessian* dari fungsi tersebut sebagai berikut:

$$S = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad (33)$$

Titik maksimum dan minimum dipenuhi jika:

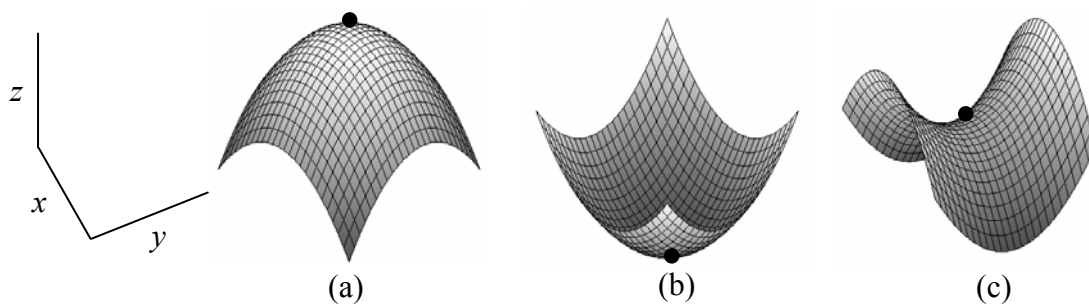
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad S > 0, \quad \text{Maksimum} \quad (34a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad S > 0, \quad \text{Minimum} \quad (34b)$$

Sedangkan jika:

$$S < 0 \quad (35)$$

maka titik tersebut dinamakan titik sadel (titik yang berada pada suatu permukaan yang mirip pelana kuda) dan  $\partial^2 f / \partial x^2$  tidak perlu dievaluasi. Jika  $S = 0$  sifat titik tersebut tidak dapat ditentukan. Ilustrasi masing titik diperlihatkan pada Gambar 6(a) untuk titik maksimum, 6(b) titik minimum dan 6(c) untuk titik sadel.



Gambar 6

*Contoh 4.5.* Tentukan titik ekstrim fungsi (i)  $f(x) = x^2 - 1$ , (ii)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , serta sifatnya. Untuk fungsi pertama  $\frac{df}{dx} = 2x = 0$ , didapatkan  $x_0 = 0$ . Masukkan nilai tersebut ke fungsi (i) maka dalam koordinat kartesis titik ekstrimnya berada di  $(0, -1)$ .

Selanjutnya, karena  $\frac{d^2f}{dx^2} = 2 > 0$ , maka titik tersebut merupakan titik minimum. Untuk

fungsi kedua, titik ekstrimnya dapat dicari melalui hubungan  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$  dan

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$ , sehingga titik ekstrimnya adalah  $(x_0 = 0, y_0 = 0)$  yang berada di posisi

$(0, 0, 0)$  dalam koordinat kartesis. Untuk menentukan sifat titik tersebut kita cari nilai

$$\text{Hessian } S \text{ titik tersebut: } S = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = (2)(-2) - (0) = -4 < 0.$$

#### 4.2. Nilai Ekstrim dengan Kendala

Suatu fungsi yang titik ekstrimnya tidak hanya ditentukan oleh kondisi dimana turunan pertamanya berharga nol tapi juga oleh kaitan antar variabel dikatakan memiliki nilai ekstrim berkendala.

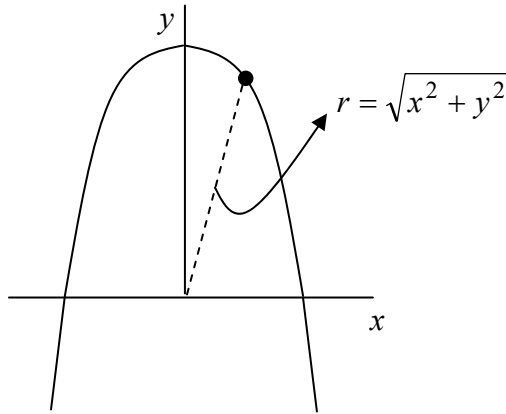
Misalkan kita memiliki sebuah kawat yang dibengkokkan sedemikian rupa sehingga bentuknya menyerupai kurva dari fungsi

$$y(x) = 1 - x^2 \tag{36}$$

Sebagaimana terlihat pada Gambar 7, dan kita ingin melihat nilai ekstrim dari jarak

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (37)$$

antara suatu titik di kawat tersebut dengan pusat koordinat kawat tersebut.



Gambar 7

Jika kita secara naif mencari nilai ekstrim dari persamaan (37), maka berdasarkan kondisi (32) kita dapatkan:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \quad (38a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \quad (38b)$$

Jelas terlihat bahwa titik kritis yang kita peroleh tidak memenuhi persamaan (36) karena  $y_0 \neq 1 - x_0^2$ . Hal ini disebabkan karena antara  $x$  dan  $y$  memiliki hubungan lewat fungsi pada persamaan (36) yang kita sebut sebagai *fungsi kendala*.

Untuk memecahkan sistem dengan kendala di atas, ada beberapa cara yang dapat kita tempuh: pertama dengan menggunakan metode *Eliminasi*, kedua dengan metode *Turunan Implisit* dan yang ketiga dengan metode *Pengali Lagrange*.

#### 4.2.1. Metode Eliminasi

Dalam metode ini, pada dasarnya kita hanya mensubstitusikan persamaan (36) ke dalam persamaan (37) dan misalkan  $R = r^2$  maka kita sampai pada persamaan:

$$R(x) = x^2 + (1 - x^2)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \quad (39)$$

Agar lebih memudahkan, kita gunakan bentuk kuadrat dari fungsi  $r$ . Persamaan (39) merupakan fungsi satu variabel, yang selanjutnya dapat kita cari nilai ekstrimnya dengan menerapkan kondisi (29):

$$\frac{dR}{dx} = 2x(2x^2 - 1) = 0 \quad (40)$$

Persamaan (40) di atas memiliki tiga akar yaitu:  $x_0 = 0$  dan  $x_{\pm} = \pm\sqrt{1/2}$ . Sedangkan turunan keduanya:

$$\frac{d^2R}{dx^2} = 12x^2 - 2 \quad (41)$$

Kini kita tinjau  $x_0 = 0$  dengan dan  $y_0 = 1$ , berdasarkan persamaan (41) diketahui bahwa

$\frac{d^2R}{dx^2} = -2 < 0$ , sehingga titik tersebut adalah titik maksimum berdasarkan kondisi (30b).

Kemudian untuk titik  $x_{\pm} = \pm\sqrt{1/2}$  dengan  $y_{\pm} = 1/2$ , kita dapatkan bahwa  $\frac{d^2R}{dx^2} = 4 > 0$ , yang menunjukkan kedua titik tersebut adalah titik-titik minimum.

#### 4.2.1. Metode Turunan Implisit

Tinjau kembali fungsi  $R = x^2 + y^2$ . Turunan totalnya terhadap  $x$  adalah:

$$\frac{dR}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx} \quad (42)$$

Dipihak lain, diferensial total fungsi kendala pada persamaan (36) adalah:

$$dy = -2x dx \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx} = -2x \quad (43)$$

Substitusikan persamaan (36) dan (43) ke dalam persamaan (42) diperoleh:

$$\frac{dR}{dx} = 2x - 4xy \quad (44)$$

Agar  $R$  berada pada titik ekstrim maka  $dR = 0$ , dan dengan mensubstitusikan fungsi  $y$  pada persamaan (36), didapatkan seperti melalui metode eliminasi, titik-titik ekstrimnya adalah:  $x_0 = 0$  dan  $x_{\pm} = \pm\sqrt{1/2}$ .

Untuk memeriksa maksimum dan minimumnya diperlukan  $d^2R/dx^2$ . Turunkan persamaan (44) sekali terhadap  $x$  menghasilkan:

$$\frac{d^2R}{dx^2} = 2 - 4y - 4x \frac{dy}{dx} \quad (45)$$

Dari persamaan (36) dan (43) didapatkan lagi persamaan (41) dan hasil yang sama seperti pada metode eliminasi pun kita dapatkan kembali pula.

#### 4.2.1. Metode Pengali Lagrange

Tinjau fungsi kendala pada persamaan (36). Secara umum kita dapat menyatakan fungsi kendala tersebut dalam bentuk:

$$\phi(x, y) = c \quad (46)$$

dengan  $c$  adalah sebuah konstan, sehingga diferensiasi totalnya adalah:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = 0 \quad (47)$$

Selanjutnya, misalkan  $f(x, y)$  adalah fungsi yang pada nilai ekstrimnya memenuhi:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (48)$$

maka bentuk berikut akan tetap berlaku:

$$df + \lambda d\phi = 0 \quad (49)$$

dengan  $\lambda$  adalah sebuah konstanta. Dari sini kita dapat membentuk fungsi baru:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y) \quad (50)$$

Berdasarkan persamaan (47) dan (48) diperoleh:

$$df + \lambda d\phi = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dy = 0 \quad (51)$$

Dari sistem persamaan tersebut ditambah dengan persamaan (46) untuk fungsi kendala, kita dapat mencari nilai  $\lambda$  sehingga memenuhi:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \quad (52a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad (52b)$$

$$\phi(x, y) = c \quad (52c)$$

Faktor pengali  $\lambda$  disebut juga sebagai *faktor pengali Lagrange*. Untuk mencari nilai-nilai ekstrim yang dimaksud, maka kita dapat memperolehnya dengan memecahkan persamaan (46) dan (52) secara bersama-sama guna mendapatkan  $x_0$ ,  $y_0$  dan  $\lambda$ .

Kembali pada fungsi kendala (36) yang dituliskan kembali seperti persamaan (46), diperoleh fungsi  $F$  terkait:

$$F = \underbrace{x^2 + y^2}_f + \lambda \underbrace{(x^2 + y)}_\phi \quad (53)$$

dan sistem persamaan yang harus dipecahkan adalah:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(1 + \lambda)x = 0 \quad (54a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \quad (54b)$$

$$x^2 + y = 1 \quad (54c)$$

Solusi persamaan (54a) memberikan  $x_0 = 0$  atau  $\lambda = -1$ . Dari persamaan (54c) untuk  $x_0 = 0$  menghasilkan  $y_0 = 1$ , yang pada gilirannya dari persamaan (54b) menghasilkan  $\lambda = -2$ . Substitusi  $\lambda = -1$ , ke persamaan (54b) didapatkan  $y_0 = 1/2$ . Selanjutnya dengan mensubstitusikan  $y_0 = 1/2$  ke persamaan (54c) diperoleh kembali  $x_{\pm} = \pm\sqrt{1/2}$ . Sehingga kita dapatkan pasangan  $(x_0, y_0, \lambda)$  yang dimaksud adalah  $(0, 1, -2)$  dan  $(\pm\sqrt{1/2}, 1/2, -1)$ . Hasil ini persis sama dengan metode eliminasi dan metode turunan implisit yang kita bahas pada pasal sebelum ini. Untuk mengetahui sifat dari titik-titik ekstrim tersebut kembali dapat kita gunakan kondisi turunan total fungsi  $f$  terhadap  $x$ .

Dari ketiga metode yang kita bahas tadi, masing-masing memiliki keunggulan sendiri-sendiri, tergantung dari sistem dengan kendala yang kita hadapi. Tapi, secara umum metode pengali Lagrange lebih memperlihatkan keunggulan untuk kasus dengan tingkat kerumitan yang relatif tinggi.

## 5. Contoh Penerapan dalam Fisika

### 5.1. Perubahan Variabel

Hampir semua fenomena-fenomena di dalam Fisika harus digambarkan melalui persamaan diferensial. Jika fenomena tersebut melibatkan beberapa variabel, baik berupa

besaran pokok ataupun besaran turunan, maka persamaan diferensial yang terkait akan berbentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial terkait tersebut kadang-kadang akan lebih mudah dicari solusinya jika kita menyatakan dalam bentuk variabel-variabel baru yang merupakan fungsi dari variabel lama.

Untuk jelasnya, tinjau sebagai contoh persamaan gelombang berikut:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (55)$$

dengan  $\Psi$  menyatakan fungsi gelombang dan  $v$  merupakan laju perambatan gelombang. Dalam pengalaman sehari-hari, kita sering menjumpai gundukan air yang merambat di dalam kolam atau perambatan gelombang air laut di pantai. Secara ideal, kesemuanya dapat dihipotesiskan oleh persamaan (55) di atas.

Persamaan gelombang (55) memiliki solusi yang dapat menggambarkan perambatan dua gelombang yang saling berlawanan arah, oleh karena itu untuk menggambarannya kita dapat mendefinisikan variabel baru berikut:

$$r = x + vt \quad (56a)$$

$$s = x - vt \quad (56b)$$

Sekarang kita misalkan  $\Psi = \Psi(r, s)$ , dengan  $r = r(x, t)$  dan  $s = s(x, t)$  seperti yang diberikan oleh persamaan (56). Diferensial total  $\Psi$ ,  $r$  dan  $s$  adalah:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds \quad (57a)$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial t} dt \quad (57b)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial t} dt \quad (57c)$$

Dari ketiga diferensial total kita dapatkan:

$$d\Psi = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) dt \quad (58)$$

yang sekarang merupakan diferensial total terhadap  $x$  dan  $t$ , sehingga dengan demikian kita peroleh:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (59a)$$



$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (59b)$$

Berdasarkan persamaan (56):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -v \quad (60)$$

sehingga persamaan (59) memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \Psi \quad (61a)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = v \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s} \right) \Psi \quad (61b)$$

Akan berguna jika kita menyatakan operator pada persamaan (61) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} \quad (62a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = v \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (62b)$$

Untuk mencari turunan parsial kedua dari fungsi  $\Psi$  terhadap  $x$  dan  $t$ , kita dapat menggunakan penulisan operator pada persamaan (62) sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \quad (63a)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = v^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right) = v^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \right) \quad (63b)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (63) ke dalam persamaan gelombang (55) diperoleh bentuk persamaan diferensial untuk gelombang dalam variabel  $r$  dan  $s$  sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial s} = 0 \quad (64)$$

Persamaan gelombang (64) jelas lebih sederhana dari persamaan (55). Pemecahan dari persamaan (64) tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Psi = \Psi_- \underbrace{(x + vt)}_r + \Psi_+ \underbrace{(x - vt)}_s \quad (65)$$

yang tidak lain menggambarkan gelombang yang merambat ke arah  $x$  negatif (diwakili oleh fungsi  $\Psi_-$ ) dan gelombang yang merambat ke arah  $x$  positif (diwakili oleh fungsi  $\Psi_+$ ).

### 5.2. Hubungan Maxwell dalam Termodinamika

Termodinamika merupakan cabang Fisika yang paling banyak menggunakan perumusan turunan dan diferensial parsial. Misalnya, hukum I Termodinamika dapat dituliskan dalam bentuk diferensial berikut:

$$\bar{d}Q = dU + \bar{d}W \quad (66)$$

dengan  $\bar{d}Q$  menyatakan sejumlah kecil kalor yang keluar/masuk sistem,  $dU$  menyatakan selisih infinitesimal energi dalam sistem dan  $\bar{d}W$  menyatakan sejumlah kecil kerja yang diterima/dilakukan sistem. Perlu dicatat bahwa  $\bar{d}Q$  dan  $\bar{d}W$  bukan menyatakan selisih, sehingga operator diferensialnya dituliskan sebagai  $\bar{d}$ .

Untuk sistem yang bersifat reversibel atau prosesnya dapat dibalik arahnya, maka berlaku hubungan:

$$\bar{d}Q = TdS \quad (67)$$

dengan  $T$  adalah temperatur dan  $dS$  adalah selisih infinitesimal entropi ( $S$ ) sistem. Sementara itu, sejumlah kecil usaha dapat dituliskan sebagai:

$$\bar{d}W = PdV \quad (68)$$

dengan  $P$  adalah tekanan dan  $dV$  adalah selisih infinitesimal volume ( $V$ ) sistem. Berdasarkan hubungan pada persamaan (67) dan (68), maka persamaan (66) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$dU = TdS - PdV \quad (69)$$

Dari perumusan ini jelas terlihat bahwa energi dalam merupakan fungsi dari entropi dan volume,  $U = U(S, V)$ .

Tinjau kembali definisi diferensiasi total yang diberikan oleh persamaan (11) yang ditulis ulang sebagai berikut:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy \quad (71)$$

dengan  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$  menyatakan turunan parsial  $f$  terhadap  $x$  dengan  $y$  konstan dan  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$  menyatakan turunan parsial  $f$  terhadap  $y$  dengan  $x$  konstan. Selanjutnya kita asumsikan bahwa kita berhubungan dengan fungsi  $f$  yang bersifat konservatif sehingga memenuhi kondisi berikut:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (72)$$

Maka dari sini kita dapatkan diferensial total dari fungsi  $U = U(S, V)$  adalah:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \quad (72)$$

Bandingkan dengan persamaan (69) kita peroleh:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -P \quad (73)$$

Selanjutnya berdasarkan kondisi (72) dan turunan parsial berikut:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \quad (74a)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \quad (74b)$$

diperoleh hubungan berikut:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \quad (75)$$

yang dikenal sebagai salah satu dari empat buah “Hubungan Maxwell” (*Maxwell Relations*) dalam Termodinamika. Pada hubungan ini diperlihatkan bahwa pada proses reversibel, perubahan temperatur terhadap volume pada entropi tetap sama dengan negatif perubahan tekanan terhadap entropi pada volume tetap.

## BAB 5

### TEKNIK INTEGRASI DAN INTEGRAL LIPAT

#### 1. Pendahuluan

Jika pada bab 4 kita telah mendiskusikan konsep turunan dari sebuah fungsi dimana  $A' = dA/dx$  merupakan fungsi turunan dari  $A$ , maka pada bab ini kita akan mendiskusikan bagaimana cara untuk memperoleh kembali fungsi  $A$  tersebut jika yang kita ketahui adalah fungsi turunannya, yakni  $A'$ . Proses untuk memperoleh kembali fungsi tersebut dinamakan proses integrasi, dan fungsi  $A$  dinamakan *integral* dari fungsi  $A'$  dan secara simbolik matematik dituliskan sebagai:

$$A(x) = \int A'(x)dx \quad (1)$$

Seperti halnya konsep mengenai turunan dan diferensiasi, konsep integral di dalam Fisika juga memegang peranan yang sangat penting. Sebagai contoh sederhana dalam Fisika Dasar kita telah mempelajari bahwa besaran kecepatan merupakan turunan dari fungsi posisi terhadap waktu. Jika yang kita miliki adalah informasi mengenai kecepatan setiap saat dari suatu benda, maka untuk memperoleh informasi mengenai posisi benda tersebut setiap saat kita dapat lakukan dengan mengintegalkan fungsi kecepatan tersebut terhadap waktu. Masih banyak lagi kegunaan dari perumusan integral ini, antara lain misalnya untuk mengukur volume/luas permukaan dari suatu benda yang diketahui fungsi proyeksinya pada suatu bidang dua dimensi atau untuk menentukan momen inersia suatu benda yang berputar pada sumbu tertentu.

#### 2. Definisi Integral

Seperti yang telah disinggung pada bagian pendahuluan di atas, secara sederhana konsep integral pada dasarnya merupakan konsep anti-turunan, dimana ia merupakan proses kebalikan dari proses penurunan suatu fungsi. Secara geometri, kita dapat memahami konsep ini sebagaimana yang diilustrasikan dalam Gambar 1. Misalkan kita memiliki suatu kurva, sebut saja  $A'$ , maka berdasarkan definisi diferensiasi:

$$dA = A' dx \quad (2)$$

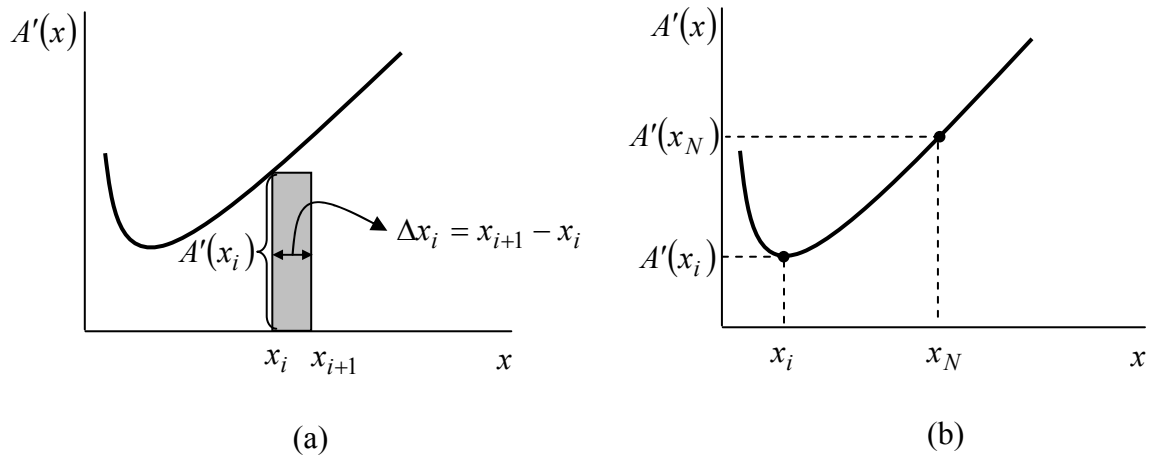
yang dapat kita tuliskan kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$A(x_{i+1}) - A(x_i) = A'(x_i) \Delta x_i \quad (3)$$

atau

$$A(x_{i+1}) = A'(x_i)\Delta x_i + A(x_i) \quad (4)$$

dengan  $\lim \Delta x_i \rightarrow 0 = \lim(x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0 \equiv dx_i$ . Terlihat dari persamaan (4) kita dapat menentukan nilai dari fungsi  $A$  pada titik  $x_{i+1}$  berdasarkan pengetahuan kita tentang nilai fungsi tersebut di titik  $x_i$  beserta nilai turunannya.



Gambar 1

Sedangkan berdasarkan Gambar 1(b), kita dapat menyimpulkan bahwa ruas kanan persamaan (3) tidak lain adalah luas bidang persegi yang diarsir, dan dari Gambar 1(b) kita dapat menentukan nilai fungsi  $A$  di titik  $x_N$  atau  $A(x_N)$  dengan menjumlahkan bidang-bidang persegi serupa dari  $x_i$  hingga  $x_N$  sebagai berikut:

$$A(x_N) = \sum_{m=i}^N \lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} A'(x_m)\Delta x_m + A(x_i) \quad (5)$$

Misalkan kita mengganti simbol  $x_i \rightarrow x_a$  dan  $x_N \rightarrow x_b$  dan  $A'(x) \rightarrow a(x)$ , persamaan (5) dapat dituliskan dalam bentuk integral sebagaimana yang diperkenalkan pada persamaan (1) menjadi (teorema fundamental kalkulus):

$$A(x_b) - A(x_a) = \int_{x_a}^{x_b} a(x)dx = A(x) \Big|_{x_a}^{x_b} \quad (6)$$

Simbol  $\int$  pada persamaan (6) merupakan simbol integral yang menyatakan penjumlahan secara kontinu dan fungsi  $a(x)$  dinamakan sebagai *fungsi integran*.

Bentuk integral pada ruas kanan persamaan (6) disebut sebagai bentuk *integral tertentu*, karena menyertakan batas-batas integralnya yakni dari  $x_a$  hingga  $x_b$ . Jika dalam pengintegralan tersebut kita tidak menyertakan batas-batasnya, maka disebut sebagai *integral tak-tentu* seperti yang dicontohkan pada persamaan (1). Jelas, bahwa untuk mencari integral tertentu dari suatu fungsi dapat dilakukan melalui dua tahapan yaitu pertama dengan mencari bentuk integral tak-tentu fungsi tersebut dan yang kedua memberi batas-batas integrasi dari fungsi hasil integral tak-tentu tersebut. Hal penting yang patut dicatat disini adalah, bahwa hasil pengintegralan fungsi  $a(x)$  dari  $x_a$  hingga  $x_b$  tidak lain merupakan *luas* di bawah kurva fungsi tersebut dengan batas  $x_a$  dan  $x_b$ .

### 3. Teknik Pengintegralan

Pada prinsipnya, tidak ada prosedur umum yang dapat digunakan untuk mencari hasil pengintegralan tak-tentu dari suatu fungsi. Untuk memperoleh hasil integral dari suatu yang relatif kompleks, seringkali kita membutuhkan pengetahuan akan hasil integral dari beberapa fungsi sederhana yang antara lain diberikan sebagai berikut (buktikan):

$$\int Ax^p dx = \begin{cases} \frac{A}{p+1} x^{p+1}, & p \neq -1 \\ A \ln x, & p = -1 \end{cases} \quad (7a)$$

$$\int \sin(Ax) dx = -\frac{1}{A} \cos(Ax), \quad \int \cos(Ax) dx = \frac{1}{A} \sin(Ax) \quad (7b)$$

$$\int Ae^{Bx} dx = \frac{A}{B} e^{Bx} \quad (7c)$$

dan masih banyak lagi integral fungsi-fungsi sederhana lainnya dan untuk memperhemat ruang silahkan pembaca mempelajarinya pada tabel integral di buku-buku teks Kalkulus. Berbasiskan integral fungsi-fungsi sederhana tersebut, dapat dikembangkan dua teknik pengintegralan yang lazim digunakan yang akan dibahas pada pasal-pasal berikut ini.

#### 3.1. Teknik Penggantian Variabel

Pada teknik ini, yang kita lakukan adalah melakukan penggantian variabel-variabel pada fungsi inetgran dengan variabel lain yang merupakan fungsi dari variabel lama, sehingga dalam bentuk variabel baru tersebut fungsi integrannya berada dalam

bentuk yang sudah kita kenali sebelumnya. Misalkan fungsi yang akan diintegrasikan adalah

$$\int f(x)dx \quad (8)$$

selanjutnya kita perkenalkan suatu variabel baru  $u$  yang merupakan fungsi dari  $x$  atau  $u = u(x)$  dan

$$f(x) \rightarrow f[u(x)] \quad (9)$$

Diferensiasi total fungsi  $u$  tersebut diberikan oleh  $du = u'(x)dx$  dimana  $u'(x) = du/dx$ , sehingga

$$dx = \frac{du}{u'(x)} \quad (10)$$

Dari sini kita peroleh integral (8) menjadi:

$$\int \frac{f[u(x)]}{u'(x)} du \quad (11)$$

dimana bentuk fungsi integran  $f[u(x)]/u'(x)$  memiliki hasil integral yang sudah dikenali.

*Contoh 5.1.* Tentukan  $\int x\sqrt{x^2 - 1} dx$ . Misalkan  $u = x^2 - 1$  maka  $du = 2xdx$ .

Berdasarkan pemilihan tersebut  $x = \sqrt{u+1}$  dan  $dx = \frac{du}{2\sqrt{u+1}}$  dan dengan demikian kita

$$\text{dapatkan } \int x\sqrt{x^2 - 1} dx = \int \frac{\sqrt{u+1}\sqrt{u}}{2\sqrt{u+1}} du = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{3/2}.$$

*Contoh 5.2.* Tentukan  $\int x \sin x^2 dx$ . Misalkan  $u = x^2$  maka  $du = 2xdx$ . Dari sini terlihat bentuk integral tersebut berubah menjadi  $\frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u$ . Sehingga dengan demikian diperoleh  $\int x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2$ .

*Contoh 5.3.* Tentukan  $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$ . Misalkan  $u = \sqrt{x}$ , maka  $u^2 = x$  dan  $2udu = dx$ .

Sehingga  $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} = \int \frac{2udu}{u^2 - u} = \int \frac{2du}{u - 1}$ . Selanjutnya misalkan kembali  $w = u - 1$  dan

$$dw = du. \text{ Maka } \int \frac{2du}{u - 1} = \int \frac{2dw}{w} = 2 \ln w \text{ dan dengan demikian } \int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} = 2 \ln(\sqrt{x} - 1).$$

### 3.2. Teknik Integral per Bagian

Misalkan kita memiliki dua buah fungsi  $u = u(x)$  dan  $v = v(x)$ , maka berlaku turunan berantai berikut:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (12)$$

atau

$$u \frac{dv}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} - v \frac{du}{dx} \quad (13)$$

Jika kedua ruas pada persamaan (13) kita integrasikan terhadap  $x$  diperoleh:

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{d(uv)}{dx} dx - \int v \frac{du}{dx} dx \quad (14)$$

Karena  $du = \frac{du}{dx} dx$  dan  $dv = \frac{dv}{dx} dx$ , maka:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (15)$$

Rumusan pada persamaan (15) di atas dinamakan teknik *integral per bagian*. Pada prinsipnya, yang dilakukan dalam teknik pengintegralan ini ialah memindahkan persoalan  $\int u dv$  menjadi persoalan  $\int v du$  dengan asumsi bahwa integral tersebut lebih mudah untuk dipecahkan, dimana  $v = \int dv$ . Langkah yang menentukan dalam penerapan teknik ini adalah pada saat kita memilih mana yang merupakan fungsi  $u$  dan mana yang kita pilih sebagai fungsi  $v$ .

Untuk memperoleh integral tertentu dari persamaan (15), dapat dilakukan dengan menerapkan batas-batasnya sebagai berikut:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (16)$$

*Contoh 5.4.* Tentukan  $\int x \cos x dx$ . Kita ingin menuliskan bentuk  $x \cos x dx$  menjadi bentuk  $u dv$ . Salah satu pilihan adalah  $u = x$  dan  $dv = \cos x dx$ . Sehingga diperoleh  $du = dx$  dan  $v = \int \cos x dx = \sin x$  dan rumusan integral per bagiannya menjadi:

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{dx}_{du} . \text{ Jelas terlihat bahwa } \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x .$$



*Contoh 5.5.* Tentukan  $\int \ln x dx$ . Misalkan  $u = \ln x$  dan  $dv = dx$ , maka kita dapatkan  $du = \frac{dx}{x}$  dan  $v = x$ , sehingga kita dapatkan rumusan integral perbagiannya adalah:  $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx = x \ln x - \int dx$ . Jadi  $\int \ln x dx = x \ln x - x$ .

*Contoh 5.6.* Tentukan  $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$ . Terlebih dahulu kita selesaikan bentuk integral tak-tentu-nya. Misalkan  $u = e^x$  dengan  $du = e^x dx$  dan  $dv = \sin x dx$  dengan  $v = -\cos x$ , sehingga kita dapatkan bentuk integral per bagiannya (i)  $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$ . Terlihat disini kita harus menyelesaikan kembali  $\int e^x \cos x dx$ . Melalui cara yang sama di dapat: (ii)  $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$ . Suku kedua pada ruas kanan persamaan (ii) tidak lain adalah bentuk integral yang kita cari. Substitusikan persamaan (ii) ke dalam persamaan (i) diperoleh integral yang dicari:  $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$ . Dengan memasukkan syarat batas yang dimaksud, kita

dapatkan integral tertentu:  $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2}$  dengan hasil evaluasi

jika batas-batas dimasukkan:  $\frac{1}{2} e^{\pi/2} \left( \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} e^0 (\sin 0 - \cos 0) = \frac{1}{2} (e^{\pi/2} + 1)$ .

Dari beberapa contoh yang diberikan di atas, patut diperhatikan bahwa pemilihan fungsi  $u$  dan  $v$  sangat menentukan dalam keberhasilan kita memperoleh bentuk integral yang mudah dipecahkan. Hal lain yang perlu diperhatikan adalah; seringkali kita harus melakukan integrasi per bagian beberapa kali sebelum kita mendapatkan hasil yang diinginkan, seperti pada contoh 5.6.

#### 4. Diferensiasi Integral dan Aturan Leibniz

Telah kita diskusikan bahwa pada dasarnya proses pengintegralan merupakan proses anti-turunan. Misalkan:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{17}$$

dimana fungsi  $F(x)$  merupakan anti-turuna dari fungsi  $f(x)$ , maka:

$$\int_C^x f(p) dp = F(p)|_C^x = F(x) - F(C) \quad (18)$$

dengan  $C$  merupakan sebuah konstanta. Jika kita turunkan kembali persamaan (18) terhadap  $x$  diperoleh:

$$\frac{d}{dx} \int_C^x f(p) dp = \frac{dF(x)}{dx} - \frac{dF(C)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (19)$$

dan

$$\frac{d}{dx} \int_x^C f(p) dp = \frac{dF(C)}{dx} - \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx} = -f(x) \quad (20)$$

Misalkan kita melakukan pergantian  $x \rightarrow u(x)$  pada persamaan (19) dan  $x \rightarrow v(x)$  pada persamaan (20) maka berdasarkan aturan rantai diperoleh:

$$\frac{d}{dx} \int_C^{u(x)} f(p) dp = \frac{dF(u)}{dx} - \frac{dF(C)}{dx} = \underbrace{\frac{dF(u)}{du}}_{f(u)} \frac{du}{dx} = f(u) \frac{du}{dx} \quad (21a)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^C f(p) dp = \frac{dF(C)}{dx} - \frac{dF(v)}{dx} = -\underbrace{\frac{dF(v)}{dv}}_{f(v)} \frac{dv}{dx} = -f(v) \frac{dv}{dx} \quad (21b)$$

Maka berdasarkan sifat pengintegralan berikut:

$$\int_a^C f(x) dx + \int_C^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (22)$$

penjumlahan persamaan (21a) dengan (21b) akan menghasilkan:

$$\frac{d}{dx} \int_C^{u(x)} f(p) dp + \frac{d}{dx} \int_{v(x)}^C f(p) dp = \frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(p) dp \quad (23)$$

sehingga

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(p) dp = f(u) \frac{du}{dx} - f(v) \frac{dv}{dx} \quad (24)$$

Jika fungsi integran yang kita tinjau adalah  $f = f(x, p)$ , maka berlaku aturan Leibniz berikut (tanpa diberikan pembuktiannya):

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(x, p) dp = f(x, u) \frac{du}{dx} - f(x, v) \frac{dv}{dx} + \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dp \quad (25)$$

## 5. Integral Lipat Dua

Sesuai dengan definisi integral tertentu, jika kita ingin mengetahui luas suatu daerah di bawah kurva, misalnya kurva  $y = x$ , maka yang kita lakukan adalah mengintegrasikan fungsi tersebut dalam batas-batas yang diberikan:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_a}^{x_b} y dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x_a}^{x_b} = \frac{1}{2} (x_b^2 - x_a^2) \end{aligned} \quad (26)$$

dengan  $A$  menyatakan luas yang dimaksud. Bentuk integral pada persamaan (26) dapat kita tuliskan kembali dalam bentuk berikut:

$$A = \int_{x_a}^{x_b} \int_0^x dy dx \quad (27)$$

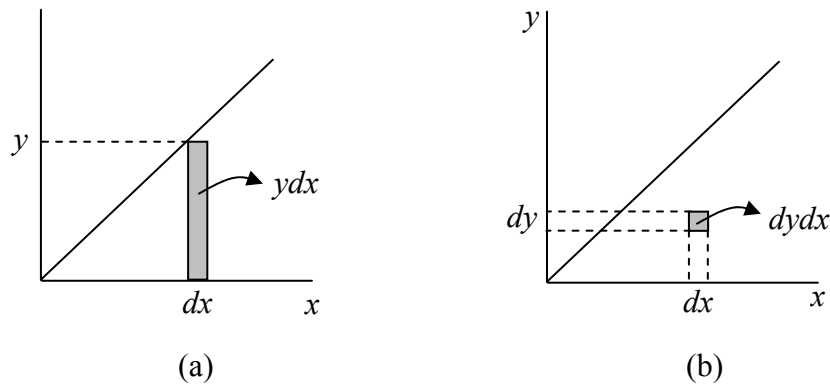
Bentuk integral pada persamaan (27) dinamakan sebagai *integral lipat*, karena dalam mengintegrasikannya kita melakukan lebih dari satu kali integrasi. Mirip dengan turunan parsial, ketika kita mengintegrasikan terhadap variabel  $y$ , maka variabel  $x$  dianggap sebagai sebuah konstanta. Untuk mendapatkan kembali persamaan (26) dari persamaan (27) langkah yang dilakukan adalah dengan terlebih dahulu mengintegrasikan terhadap  $y$ , baru kemudian terhadap  $x$  sebagai berikut:

$$A = \int_{x_a}^{x_b} \left[ \int_0^x dy \right] dx = \int_{x_a}^{x_b} [y]_0^x dx = \int_{x_a}^{x_b} x dx = \frac{1}{2} (x_b^2 - x_a^2) \quad (28)$$

Harus dicatat bahwa integral lipat bukanlah anti-turunan parsial.

Arti geometris dari integral pada persamaan (26) dan (27) diilustrasikan pada Gambar 2. Terlihat pada Gambar 2(a) bahwa pada integral (26) yang dijumlahkan adalah

elemen luas  $ydx$ , sedangkan pada integral (27) yang dijumlahkan adalah elemen luas  $dydx$  (Gambar 2(b)).



Gambar 2

Secara umum, sebuah integral lipat untuk fungsi integran dengan dua variabel,  $f(x, y)$ , yang terdefinisi pada suatu area dengan batas-batas  $x = x_a$ ,  $x = x_b$  dan kurva  $y = v(x)$  serta  $y = u(x)$ , memiliki bentuk sebagai berikut:

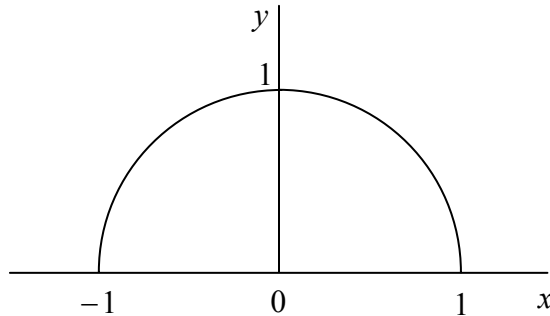
$$\int_{x_a}^{x_b} \int_{v(x)}^{u(x)} f(x, y) dy dx = \int_{x_a}^{x_b} \left[ \int_{y=v(x)}^{y=u(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (29)$$

Perhatikan bahwa ketika kita mengintegrasikan fungsi integran terhadap variabel  $y$ , maka batas-batasnya secara umum merupakan fungsi dari variabel  $x$ . Jika yang diketahui batas-batasnya adalah  $y = y_a$ ,  $y = y_b$ , dan kurva  $x = v(y)$  serta  $x = u(y)$ , maka bentuk integralnya menjadi:

$$\int_{y_a}^{y_b} \int_{v(y)}^{u(y)} f(x, y) dx dy = \int_{y_a}^{y_b} \left[ \int_{x=v(y)}^{x=u(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad (30)$$

Jika ungkapan integral yang diberikan pada persamaan (6) untuk fungsi satu variabel  $a(x)$  secara geometri menyatakan luas di bawah kurva fungsi tersebut dengan batas  $x \in [x_a, x_b]$ , maka dengan mudah kita dapat melihat bahwa ungkapan integral (29) dengan batas-batas  $x \in [x_a, x_b]$  dan  $y \in [v(x), u(x)]$  atau ungkapan integral (30) dengan batas-batas  $y \in [y_a, y_b]$  dan  $x \in [v(y), u(y)]$ , tidak lain menyatakan *volume* di bawah permukaan  $f(x, y)$  dan batas-batas integrasi.

*Contoh 5.7.* Perhatikan Gambar 3 yang merupakan setengah lingkaran dengan jari-jari 1 dan hitunglah luas di bawah kurva tersebut.



Gambar 3

Elemen luas yang dilingkupi kurva tersebut adalah  $dydx$ , sementara dari persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = 1$  kita dapatkan  $y = \sqrt{1-x^2}$  untuk setengah lingkaran bagian atas,

dengan demikian integral lipat dua yang terkait adalah: 
$$\int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dydx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Dari tabel integral dan menggunakan teknik integral per bagian, diperoleh (buktikan!):

$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right)$ , selanjutnya dengan memasukkan nilai batas

didapatkan:  $\frac{1}{2} \left( x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$ . Silahkan bandingkan dengan rumus untuk

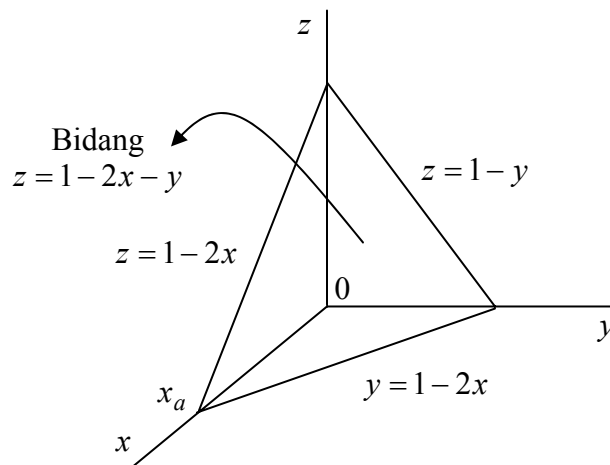
luas lingkaran.

*Contoh 5.8.* Misalkan terdapat dua buah fungsi  $v = -2x^2 - 2$  dan  $u = 2x^2 + 2$ . Tentukanlah luas area di antara keduanya dengan batas-batas  $x=1$  dan  $x=2$ . Jelas terlihat bahwa  $v < u$  untuk semua harga  $x \in [1, 2]$ . Berdasarkan persamaan (29) bentuk

integral lipatnya adalah: 
$$\int_{x=1}^{x=2} \int_{y=-2x^2-2}^{y=2x^2+2} dy dx = \int_1^2 \left[ \int_{-2x^2-2}^{2x^2+2} dy \right] dx = \int_1^2 \left[ 2x^2 + 2 - (-2x^2 - 2) \right] dx$$
 dan

hasil integrasinya adalah: 
$$\int_1^2 4(x^2 + 1) dx = 4 \left( \frac{1}{3} x^3 + x \right) \Big|_1^2 = 36.$$

*Contoh 5.9.* Tentukan volume yang berada di bawah bidang  $z(x,y)=1-2x-y$  dan di batasi oleh bidang  $x=y=z=0$ . Dari persamaan bidang tersebut, terlihat bahwa pada bidang  $x=0$  (atau bidang  $y-z$ ) persamaan garisnya adalah  $z=1-y$ , dan pada bidang  $y=0$  (atau bidang  $x-z$ ) persamaan garisnya adalah  $z=1-2x$ , sedangkan pada  $z=0$  (atau bidang  $x-y$ ) persamaan garisnya adalah  $y=1-2x$ , sehingga dengan demikian diperoleh volume yang dimaksud adalah sebagai berikut:



Gambar 4

yaitu yang berada di bawah bidang  $z$  dan dibatasi oleh dinding-dinding bidang  $x-y$ ,  $x-z$  dan  $y-z$ .

Integral lipat dua untuk menghitung volume di bawah kurva tersebut adalah:

$$\int_{x=0}^{x=x_a} \int_{y=0}^{y=1-2x} z \, dy \, dx = \int_0^{x_a} \int_0^{1-2x} (1-2x-y) \, dy \, dx \quad \text{dengan batas-batas integralnya adalah}$$

$y \in [0, 1-2x]$  dan  $x \in [0, x_a]$ . Pertama kita integralkan  $z$  terhadap  $y$  dengan  $x$  konstan:

$$\int_0^{x_a} \left[ \int_0^{1-2x} (1-2x-y) \, dy \right] dx = \int_0^{x_a} \left[ \left( y - 2xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^{1-2x} \right] dx = \int_0^{x_a} \left( 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx, \text{ kemudian}$$

kita integralkan lagi terhadap variabel  $x$  sehingga didapatkan bahwa volume yang dicari

$$\text{adalah: } \int_0^{x_a} \left( 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{2}{3}x_a^3 - x_a^2 + \frac{1}{2}x_a.$$

## 6. Integral Lipat Tiga

Perluasan dari integral lipat dua ke integral lipat tiga yang melibatkan, secara umum, fungsi integran dengan tiga variabel  $f(x, y, z)$  diberikan oleh:

$$\int_{x_a}^{x_b} \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{s(x,y)}^{t(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx = \int_{x=x_a}^{x=x_b} \left[ \int_{y=u(x)}^{y=v(x)} \left[ \int_{z=s(x,y)}^{z=t(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx \quad (31)$$

dimana dalam melakukannya, perlu diperhatikan bahwa fungsi pada batas integrasi harus sesuai dengan urutan pengintegralan terhadap variabel  $x, y, z$  sebagaimana dicontohkan oleh persamaan (29) dan (30) untuk integral lipat dua. Elemen  $dx dy dz$  dalam persamaan (31) menyatakan elemen volume. Serupa dengan persamaan (27) mengenai integral luas, maka integral lipat tiga berikut

$$V = \int_{x_a}^{x_b} \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{s(x,y)}^{t(x,y)} dz dy dx \quad (32)$$

tidak lain menyatakan volume dari suatu bentuk geometri sebuah permukaan tertutup. Sebagaimana dicontohkan pada contoh 5.9, maka bentuk integral lipat tiga bagi permukaan yang dimaksud berbentuk:

$$V = \int_{x=0}^{x=x_a} \int_{y=0}^{y=1-2x} \int_{z=0}^{z=1-2x-y} dz dy dx \quad (33)$$

*Contoh 5.10.* Tentukan  $\int_0^2 \int_1^y \int_{y+z}^{2y+z} 6y dx dy dz$ . Pertama kita atur terlebih dahulu

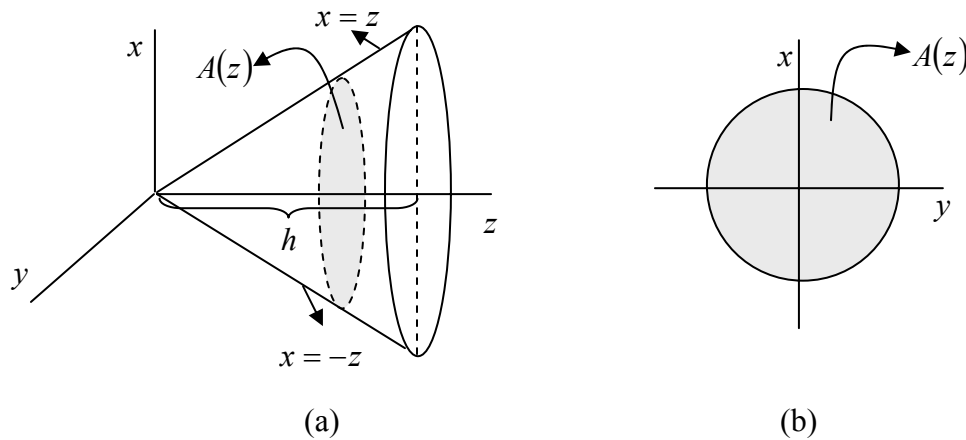
integral tersebut menjadi:  $\int_{y=0}^{y=2} \left[ \int_{z=1}^{z=y} \left[ \int_{x=y+z}^{x=2y+z} 6y dx \right] dz \right] dy$ . Kita selesaikan terlebih dulu

integral (1) terhadap variabel  $x$ :  $\int_{y+z}^{2y+z} 6y dx = 6y(x) \Big|_{y+z}^{2y+z} = 6y(2y+z) - 6y(y+z) = 6y^2$ .

emudian (2) terhadap variabel  $z$  :  $\int_1^y 6y^2 dz = 6y^2(z)|_1^y = 6y^2(y) - 6y^2(1) = 6y^3 - 6y^2$  dan

akhirnya (3) terhadap variabel  $y$  :  $\int_0^2 (6y^3 - 6y^2) dy = \left( \frac{3}{2}y^4 - 2y^3 \right) \Big|_0^2 = 24 - 16 = 8$ .

*Contoh 5.11.* Tentukan volume kerucut  $z^2 = x^2 + y^2$  dengan tinggi  $h$  seperti yang diilustrasikan dalam Gambar 5(a) berikut:



Gambar 5

Kerucut tersebut dibatasi oleh kurva lingkaran  $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$  pada bidang  $x - y$ , dimana tanda positif menyatakan setengah lingkaran bagian atas dan tanda negatif untuk setengah lingkaran bagian atas. Pertama kita tinjau integral luas lingkaran pada bidang

$x - y$  dengan elemen luas  $dydx$ , seperti pada contoh 5.7:  $A(z) = \int_{x=-z}^{x=z} \int_{y=-\sqrt{z^2-x^2}}^{y=\sqrt{z^2-x^2}} dydx$  yang

tidak lain merupakan luas lingkaran di setiap  $z$ . Perhatikan bahwa batas-batas integrasi terhadap variabel  $x$  adalah  $x = -z$  sampai  $z$ , yang tidak lain adalah garis proyeksi pada

bidang  $x - z$ . Selanjutnya, volume yang terkait adalah  $V = \int_{z=0}^{z=h} A(z) dz$  sehingga integral

lipat tiganya adalah:  $\int_0^h \int_{-z}^z \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} dy dx dz = \int_0^h \int_{-z}^z 2\sqrt{z^2-x^2} dx dz$ . Berdasarkan hasil pada

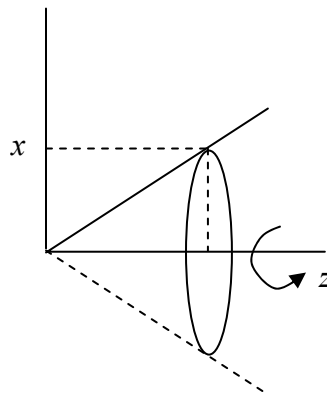


contoh 5.7:  $\int_{-z}^z 2\sqrt{z^2 - x^2} dx = 2z^2 \left( \frac{x\sqrt{1-(x/z)} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x}{z}\right) \right) \Big|_{-z}^z = \pi z^2 = A(z)$ . Dengan

demikian volume kerucut tersebut adalah:  $\int_0^h \pi z^2 dz = \frac{1}{3} \pi h^3$ .

Menarik untuk dicatat bahwa pada contoh 5.11 di atas, luas  $A(z) = \pi z^2$  tidak lain merupakan merupakan luas lingkaran dengan jari-jari  $z$ . Volume kerucut tersebut dapat dipandang pula sebagai hasil putaran garis  $x = z$  terhadap sumbu  $z$  seperti yang diilustrasikan pada Gambar 6. Lingkaran pada Gambar 6 memiliki jari-jari  $x$ , sehingga luasnya adalah  $\pi x^2$ . Volume kerucut dapat diperoleh dengan menjumlahkan (mengintegalkan) seluruh lingkaran dari  $z = 0$  sampai  $h$  atau  $\int_0^h \pi x^2 dz$  dan karena

$x = z$ , maka  $V = \int_0^h \pi z^2 dz = \frac{1}{3} \pi h^3$  sama seperti yang diperoleh pada contoh 5.11.



Gambar 6

Secara umum, jika kita ingin mencari volume geometri yang merupakan hasil perputaran sebuah kurva garis  $f(x)$  misalnya, terhadap sumbu  $x$ , maka kita cukup melakukan integrasi berikut:

$$V = \int_{x=x_a}^{x=x_b} \pi f^2(x) dx \quad (34)$$

dimana  $\pi f^2$  merupakan luas lingkaran hasil putaran fungsi  $f$  terhadap sumbu  $x$ .

Dengan prinsip yang sama, kita dapat pula mencari luas permukaan geometri hasil putaran tersebut melalui integral berikut:

$$A = \int_{x=x_a}^{x=x_b} 2\pi f(x) dx \quad (35)$$

dimana  $2\pi f$  adalah keliling lingkaran dengan jari-jari  $f$ .

*Contoh 5.12.* Tentukan volume dan luas permukaan benda yang merupakan hasil putaran fungsi  $f(x) = x^2$  terhadap sumbu  $x$  dari  $x = 0$  sampai  $h$ .  $V = \int_0^h \pi x^4 dx = \frac{\pi}{5} h^5$

dan  $A = \int_0^h 2\pi x^2 dx = \frac{2\pi}{3} h^3$ .

## 7. Transformasi Variabel Integral

Dalam prakteknya, kita seringkali akan menemui kesulitan dalam melakukan integrasi dalam sistem koordinat siku kartesis  $(x, y, z)$  jika geometri benda yang kita tinjau tidak relatif sederhana. Untuk mengatasinya, kita dapat mentransformasikan bentuk integral terkait ke dalam sistem koordinat tertentu seperti misalnya koordinat polar untuk kasus dua integral lipat dua, dan silinder atau bola untuk integral lipat tiga atau ke dalam sistem koordinat lainnya sesuai dengan bentuk geometri yang kita tinjau. Sebelum kita membahas perubahan variabel pada integral lipat, ada baiknya kita membahas terlebih dulu elemen luas sistem koordinat polar serta elemen volume koordinat silinder dan bola.

### 7.1. Elemen Luas koordinat Polar

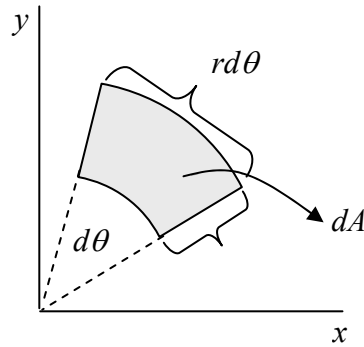
Koordinat polar dinyatakan dalam notasi  $(r, \theta)$  dengan  $r$  adalah jari-jari titik yang ditinjau dan  $\theta$  adalah sudut terhadap sumbu tetap tertentu. Hubungan antara koordinat polar dengan koordinat kartesis diberikan oleh transformasi:

$$x = r \cos \theta \quad (36a)$$

$$y = r \sin \theta \quad (36b)$$

dengan  $r \in [0, \infty]$  dan  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Berdasarkan Gambar 7, jika elemen luas yang dimiliki oleh koordinat kartesis adalah  $dA = dx dy$ , maka dalam koordinat polar diberikan oleh:

$$dA = r d\theta dr \quad (37)$$



Gambar 7

Berbeda dengan elemen luas dalam koordinat kartesis, maka pada koordinat polar kita memiliki tambahan suku yakni "r" dalam ungkapan  $dA$  pada persamaan (37) dan bukan hanya sekedar  $d\theta dr$ .

Misalkan kita memiliki sebuah bentuk integral dengan fungsi integran dengan dua variabel  $f(x, y)$ , maka bentuk tersebut akan bertransformasi ke dalam sistem koordinat polar menjadi:

$$\iint_{A(x,y)} f(x, y) dx dy \rightarrow \iint_{A(r,\theta)} f(r, \theta) r d\theta dr \quad (38)$$

Dengan batas-batas integrasi  $A(x, y)$  yang menandakan integrasi dilakukan diseluruh permukaan, berubah menjadi  $A(r, \theta)$ .

## 7.2. Elemen Volume Koordinat Silinder

Dalam sistem koordinat silinder, posisi sebuah titik didalamnya ditentukan oleh notasi  $(\rho, \phi, z)$  dan hubungannya dengan koordinat kartesis  $(x, y, z)$  adalah:

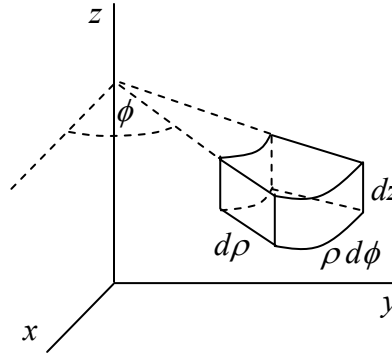
$$x = \rho \cos \phi \quad (39a)$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (39b)$$

$$z = z \quad (39c)$$

Dengan dengan  $\rho \in [0, \infty)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  dan  $z \in (-\infty, \infty)$ . Jika elemen volume dalam koordinat kartesis diberikan oleh  $dV = dx dy dz$ , maka dalam koordinat silinder, sebagaimana yang dilustrasikan dalam Gambar 8, diberikan oleh:

$$dV = \rho d\phi d\rho dz \quad (40)$$



Gambar 8

Kembali dalam koordinat silinder kita memiliki tambahan suku yakni "rho" dalam ungkapan  $dV$  pada persamaan (39).

Sekarang kita tinjau bentuk integral dengan fungsi integran dengan tiga variabel  $f(x, y, z)$ , dalam sistem koordinat silinder bentuk integralnya akan bertransformasi sedemikian rupa menjadi:

$$\iiint_{V(x,y,z)} f(x, y, z) dx dy dz \rightarrow \iiint_{V(\rho,\phi,z)} f(\rho, \phi, z) \rho d\phi d\rho dz \quad (41)$$

dimana simbol  $V$  menandakan integrasi dilakukan diseluruh volume dan mengalami perubahan  $V(x, y, z) \rightarrow V(\rho, \phi, z)$ .

*Contoh 5.13.* Nyatakan bentuk integral lipat tiga pada contoh 5.12 ke dalam sistem koordinat silinder. Dari persamaan untuk kerucut dan hubungan pada persamaan (39) didapat  $z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow z^2 = \rho^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \rho^2$  atau  $z = \rho$  untuk  $z > 0$ .

Integral yang akan diubah adalah:  $\int_{z=0}^{z=h} \int_{x=-z}^{x=z} \int_{y=-\sqrt{z^2-x^2}}^{y=\sqrt{z^2-x^2}} dy dx dz \rightarrow \iiint_{V(\rho,\phi,z)} \rho d\rho d\phi dz$ . Kini

permasalahannya adalah bagaimana menentukan batas-batasnya dalam koordinat  $(\rho, \phi, z)$ . Karena  $x \in [-x, x]$  dan  $y \in [-y, y]$  berada dalam satu lingkaran pada bidang  $x - y$  dengan jari-jari  $\rho$  dan  $z = \rho$ , maka berdasarkan hubungan (39) terlihat bahwa  $\rho \in [0, \rho = z]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  dan  $z \in [0, h]$  sehingga dengan demikian kita dapatkan

$$\text{integralnya adalah: } \int_{z=0}^{z=h} \int_{\rho=0}^{\rho=z} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \rho d\phi d\rho dz = 2\pi \int_0^h \int_0^z \rho d\rho dz = \pi \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3} \pi h^3 .$$

### 7.3. Elemen Volume Koordinat Bola

Dalam sistem koordinat bola, posisi sebuah titik didalamnya ditentukan oleh notasi  $(r, \theta, \phi)$  dan hubungannya dengan koordinat kartesis  $(x, y, z)$  adalah:

$$x = r \cos \theta \cos \phi \quad (42a)$$

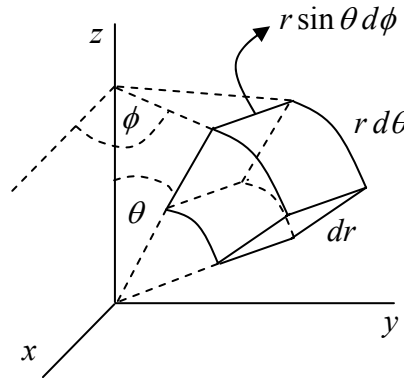
$$y = r \cos \theta \sin \phi \quad (42b)$$

$$z = r \sin \theta \quad (42c)$$

dengan  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  dan  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Elemen volume dalam koordinat bola pada Gambar 9 adalah:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (43)$$

dengan suku tambahan  $r^2 \sin \theta$  pada ungkapan  $dV$ .



Gambar 9

Serupa dengan ungkapan (41), maka bentuk integral lipat tiga pada sistem koordinat  $(x, y, z)$ , di dalam koordinat bola akan berubah menjadi:

$$\iiint_{V(x,y,z)} f(x, y, z) dx dy dz \rightarrow \iiint_{V(r,\phi,\theta)} f(r, \phi, \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (44)$$

### 7.4. Jacobian

Misalkan kita ingin melakukan perubahan variabel dari sistem koordinat  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dengan elemen "volume"  $dx_1 dx_2 \dots dx_n$  ke sistem koordinat  $(u_1, u_2, \dots, u_3)$  sehingga  $x_1 = x_1(u_1, u_2, \dots, u_3)$ ,  $x_2 = x_2(u_1, u_2, \dots, u_3)$ , ...,  $x_n = x_n(u_1, u_2, \dots, u_3)$ , maka untuk memperoleh elemen "volume" dalam sistem koordinat yang baru tersebut dapat

dilakukan dengan menghitung *Jacobian*,  $J$ , dari perubahan variabel tersebut sedemikian sehingga:

$$dx_1 dx_2 \dots dx_n \rightarrow J du_1 du_2 \dots du_n \quad (45)$$

Jacobian  $J$  didefinisikan sebagai determinan dari matriks berikut:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \quad (46)$$

Secara simbolik Jacobian biasa pula dituliskan secara singkat dalam bentuk:

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \quad (47)$$

Secara umum, sebuah integral lipat  $n$  dalam sistem koordinat  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  akan mengalami transformasi ke dalam sistem koordinat  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  sebagai berikut:

$$\iiint \dots \int_V f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \rightarrow \iiint \dots \int_{V'} f(u_1, u_2, \dots, u_n) J du_1 du_2 \dots du_n \quad (48)$$

dengan batas  $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan  $V' = V'(u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

*Contoh 5.14.* Tentukan Jacobian dari transformasi variabel dari koordinat  $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ . Kasus yang kita tinjau adalah untuk  $n = 2$ . Berdasarkan hubungan pada persamaan (36), maka didapatkan Jacobian yang dimaksud adalah:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \quad (47)$$

Sehingga dengan demikian kita dapatkan elemen "volume"nya adalah:

$$dx dy \rightarrow J d\theta dr = r d\theta dr \quad (48)$$

yang tidak lain adalah elemen luas yang telah kita peroleh di persamaan (37).

Sebagai latihan, pembaca dapat memperoleh kembali elemen volume untuk koordinat silinder dan bola dengan mencari masing-masing Jacobian.

## 8. Contoh Penerapan dalam Fisika

Di dalam Fisika, integral lipat dua atau tiga umumnya digunakan untuk menghitung, misalnya dalam mekanika, massa total suatu benda jika diketahui fungsi rapat massanya, titik pusat massa, momen inersia benda terhadap suatu sumbu putar. Penerapan lainnya adalah dalam kajian Listrik-Magnet untuk menghitung kuat medan atau potensial di suatu titik akibat kehadiran distribusi muatan listrik disekitarnya.

Sebagai contoh penerapan sederhana, kita akan tinjau persoalan penentuan massa total dan rapat massa dari suatu distribusi rapat muatan yang diketahui fungsinya serta titik pusat massa. Kita tinjau geometri kerucut yang sebelumnya telah kita bahas pada contoh 5.11 dan 5.13, dengan volume total benda diberikan oleh integral dalam koordinat silinder:

$$V = \int_{z=0}^{z=h} \int_{\rho=0}^{\rho=z} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \rho d\phi d\rho dz \quad (49)$$

Misalkan fungsi rapat massa di dalam benda yang ditinjau diberikan oleh:

$$m(\rho, \phi, z) = \rho \sin^2 \phi \quad (50)$$

Dimana elemen massa di suatu titik dan massa total diberikan oleh:

$$dM = m(\rho, \phi, z) dV \quad (51a)$$

$$M = \iiint_V m(\rho, \phi, z) \rho d\phi d\rho dz \quad (51b)$$

Dari sini diperoleh bahwa integral lipat tiga untuk penentuan massa total benda dengan bentuk seperti yang diilustrasikan oleh Gambar 4 adalah:

$$M = \int_{z=0}^{z=h} \int_{\rho=0}^{\rho=z} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \rho^2 \sin^2 \phi d\phi d\rho dz \quad (52)$$

Dengan hasil integrasinya adalah (buktikan!):

$$M = \frac{1}{12} \pi h^4 \quad (53)$$

Untuk mengetahui proyeksi titik pusat massanya di sumbu  $z$ , kita dapat memanfaatkan definisi berikut:

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \int_V z dM \quad (54)$$

Kini tinjau integral berikut:

$$\begin{aligned}\int_V z dM &= \int_{z=0}^{z=h} \int_{\rho=0}^{\rho=z} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} z \rho^2 \sin^2 \phi d\phi d\rho dz \\ &= \frac{1}{15} \pi h^5\end{aligned}\quad (55)$$

sehingga diperoleh:

$$z_{cm} = \frac{4}{5} h \quad (56)$$

Dengan cara yang sama, kita dapat pula menghitung untuk  $\rho_{cm}$  dan  $\phi_{cm}$  melalui hubungan berikut dan diperoleh:

$$\rho_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho dM = \frac{3}{5} h \quad (57a)$$

$$\phi_{cm} = \frac{1}{M} \int \phi dM = \pi \quad (57b)$$

Dengan demikian titik pusat massa kerucut dalam koordinat silinder berada di:

$$(\rho_{cm}, \phi_{cm}, z_{cm}) = \left( \frac{3}{5} h, \pi, \frac{4}{5} h \right) \quad (58)$$

Kemudian berdasarkan hubungan (39) kita dapatkan titik tersebut dalam sistem koordinat kartesis sebagai berikut:

$$(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) = \left( -\frac{3}{5} h, 0, \frac{4}{5} h \right) \quad (59)$$



## BAB 6

### ANALISIS VEKTOR

#### 1. Pendahuluan

Pada bab 3 kita telah mempelajari tentang konsep vektor dalam ruang vektor berdimensi dua dan tiga beserta dengan operasi perkalian diantaranya. Pada bab ini, kita akan membahas perumusan mengenai sifat-sifat penerapan operator-operator diferensial atau integral berbentuk vektor terhadap fungsi-fungsi skalar dan vektor bervariasi ruang-waktu. Secara khusus, sebuah fungsi yang terdefinisi di suatu rentang tertentu dalam ruang-waktu dan menggambarkan keadaan suatu besaran fisis dinamakan "Medan". Sebagai contoh, di sekitar lilin yang menyala kita akan merasakan hangat. Untuk menggambarkan rentang ruang yang terhangati tersebut kita dapat mengatakan bahwa di sekitar lilin tersebut terdapat medan temperatur yang secara prinsip dapat diwakili oleh sebuah fungsi, sebut saja  $T(x, y, z)$ .

Pengertian medan dalam Fisika mempunyai peranan penting sekali, karena melalui konsep medan dapat diterangkan berbagai macam gejala fisis. Melalui penerapan operator-operator diferensial atau integral terhadapnya, kita dapat dipelajari sifat-sifat besaran fisis terkait sehingga kita memperoleh gambaran yang lebih memadai tentang gejala yang kita pelajari. Misalkan pada kasus medan temperatur di sekitar lilin di atas, dengan menerapkan operator gradien,  $\vec{\nabla} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ , terhadap fungsi  $T$ , kita akan mengetahui pola perubahan temperatur tersebut ke arah tertentu di suatu titik.

#### 2. Medan dan Operator Gradien

##### 2.1. Medan Skalar dan Vektor

Sebagaimana telah disinggung di atas, medan didefinisikan sebagai fungsi ruang-waktu yang mewakili suatu besaran fisis tertentu. Berdasarkan sifat, medan dapat berbentuk skalar atau vektor. Untuk medan skalar, misalkan kita lambangkan dengan  $\phi(x, y, z)$  yang menyatakan medan skalar statik yang tidak bergantung dengan waktu. Sementara untuk medan skalar dinamik dituliskan sebagai  $\phi(x, y, z, t)$  yang

menggambarkan kebergantungan terhadap waktu. Contoh medan skalar adalah: medan temperatur, medan potensial listrik dsb.

Sebuah medan vektor dapat dituliskan sebagai  $\vec{A}(x, y, z)$  untuk kasus medan statik atau  $\vec{A}(x, y, z, t)$  untuk kasus medan dinamik. Berbeda dengan kasus medan skalar yang hanya memiliki besar, maka medan vektor juga memiliki arah dengan komponen-komponennya:  $\vec{A}(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + A_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + A_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$ . Perhatikan bahwa masing-masing komponen juga merupakan fungsi ruang-waktu secara umum. Contoh besaran yang direpresentasikan oleh medan vektor adalah: medan listrik, medan kecepatan, medan potensial magnetik dsb.

## 2.2. Operator Gradien dan Turunan Berarah

Misalkan kita memiliki vektor

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \quad (1)$$

Persamaan garis yang melewati suatu titik  $(x_0, y_0, z_0)$  dan searah dengan  $\vec{a}$  dapat dituliskan sebagai (buktikan!):

$$x = x_0 + a_x t \quad (2a)$$

$$y = y_0 + a_y t \quad (2b)$$

$$z = z_0 + a_z t \quad (2c)$$

dengan  $t$  adalah variabel. Selanjutnya tinjau medan skalar  $\phi(x, y, z)$ . Pada harga-harga di sepanjang garis yang diberikan oleh persamaan (2) berlaku  $\phi(x, y, z) = \phi(t)$  yang merupakan fungsi bagi satu variabel  $t$  karena  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  dan  $z = z(t)$ . Selanjutnya kita tinjau turunan medan  $\phi$  terhadap  $t$  yang dinyatakan dalam aturan rantai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} a_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} a_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} a_z \end{aligned} \quad (3)$$

Bentuk persamaan (3) dapat dituliskan sebagai perkalian titik dua vektor berikut:

$$\frac{d\phi}{dt} = \left( \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi \cdot (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \quad (3)$$

dan dapat dituliskan kembali dalam bentuk sederhana sebagai berikut:

$$\frac{d\phi}{dt} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{a} \quad (4)$$

Dengan  $\vec{a}$  diberikan oleh persamaan (1) dan

$$\vec{\nabla}\phi = \left( \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi \quad (5)$$

didefinisikan sebagai gradien  $\phi$ , yang biasa pula dituliskan sebagai **grad**  $\phi$ . Operator:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (6)$$

didefinisikan sebagai operator gradien dan lazim pula disebut sebagai operator "del" atau "nabla".

Jika  $|\vec{a}| = 1$ , maka  $\frac{d\phi}{dt}$  disebut sebagai turunan berarah medan  $\phi$  ke arah  $\vec{a}$  dan

dengan demikian harganya dapat dihitung menurut:

$$\frac{d\phi}{dt} = |\vec{\nabla}\phi| \cos \angle(\vec{\nabla}\phi, \vec{a}) \quad (7)$$

Misalkan vektor  $\vec{a}$  menyinggung permukaan  $\phi = \text{konstan}$  dimana  $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{a} = 0$ , sehingga mengimplikasikan  $\vec{\nabla}\phi \perp \vec{a}$  atau dengan kata lain gradien  $\vec{\nabla}\phi$  tegak lurus terhadap permukaan  $\phi = \text{konstan}$  tersebut.

*Contoh 6.1.* Temperatur di suatu permukaan diberikan oleh  $T = x^2y$ , tentukan turunannya di titik  $(1, -3)$  dalam arah  $\vec{a} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z$ . Gradien fungsi tersebut

diberikan oleh  $\vec{\nabla}T = \vec{e}_x \frac{\partial x^2y}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial x^2y}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial x^2y}{\partial z} = 2xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y$ . Pada titik yang

dimaksud gradiennya adalah:  $\vec{\nabla}T \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-3}} = -6\vec{e}_x + \vec{e}_y$ . Sehingga dengan demikian diperoleh

turunan berarahnya:  $\vec{\nabla}T \cdot \vec{a} = (-6\vec{e}_x + \vec{e}_y) \cdot (2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z) = -12 + 3 = -9$ .

### 3. Divergensi dan Rotasi

Jika operator gradien  $\vec{\nabla}$  bekerja pada sebuah medan vektor, seperti juga pada perkalian vektor yang telah kita bahas pada bab 3, maka kerjanya dapat melalui perkalian titik ataupun silang. Untuk perkalian titik, misalkan kita memiliki medan vektor

$\vec{A}(x, y, z)$ , maka perkalian titik operator gradien dengannya didefinisikan sebagai divergensi dari medan vektor  $\vec{A}$  dan dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left( \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (8)$$

Lazimnya, bentuk  $(\vec{\nabla} \cdot)$  dinamakan sebagai operator divergensi dan tafsirannya akan kita diskusikan kemudian.

Untuk perkalian silang yang operator terkait dituliskan sebagai  $(\vec{\nabla} \times)$  dan lazim disebut sebagai operator rotasi atau *curl*. Jika dikenakan terhadap medan vektor  $\vec{A}$  akan diperoleh:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left( \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \\ &= \vec{e}_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}\end{aligned}\quad (9)$$

Operator gradien dapat bekerja dua kali atau lebih untuk menghasilkan operator-operator lain seperti:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\quad (10)$$

yang dinamakan operator skalar Laplacian. Misalkan  $\phi$  dan  $\psi$  adalah medan skalar, sedangkan  $\vec{A}$  dan  $\vec{B}$  medan vektor, maka beberapa hubungan berikut berlaku:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0\quad (11a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}\quad (11b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0\quad (11c)$$

$$\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \phi\quad (11d)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{A} \quad (11e)$$

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = \phi (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \phi) \times \vec{A} \quad (11f)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \quad (11g)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \quad (11h)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (11i)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi \times \vec{\nabla} \psi) = 0 \quad (11j)$$

## 4. Integral Garis

### 4.1. Definisi

Di dalam Fisika terdapat konsep mengenai usaha yang didefinisikan sebagai jumlah energi yang terlibat dalam proses perpindahan benda dalam lintasan tertentu akibat dikenai gaya. Secara umum, gaya yang dikenai pada benda tersebut berbeda di tiap titik dalam lintasan tersebut. Usaha yang dilakukan oleh gaya tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk integral berikut:

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (12)$$

dengan  $\vec{F}$  adalah gaya yang bekerja pada benda,  $\vec{r}$  adalah posisi benda dan  $d\vec{r}$  adalah elemen garis lintasan benda sedangkan simbol  $C$  menyatakan bentuk lintasan yang dilalui benda sehingga integrasi dilakukan sepanjang lintasan tersebut. Secara umum, Integral (12) dikenal sebagai *Integral Garis* bagi medan vektor sebarang dalam lintasan tertentu. Dalam koordinat kartesis  $\vec{F}$  dan  $d\vec{r}$  dituliskan sebagai:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z \quad (13a)$$

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \quad (13b)$$

sehingga:

$$W = \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (14)$$

Dalam pelaksanaannya, perhitungan integral garis dapat diselesaikan jika persamaan khusus yang menyatakan lintasan  $C$  di atas diketahui dan akan lebih memudahkan jika lintasan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan

parametrik:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  dan  $z = z(t)$  yang membuat  $dx$ ,  $dy$  dan  $dz$  dapat dinyatakan dalam  $dt$  sehingga integral garis terkait berubah menjadi persoalan satu variabel.

*Contoh 6.2.* Misalkan  $\vec{A} = \frac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{x^2 + y^2}$ . Tentukan  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$  dengan  $C$  adalah

lintasan berbentuk setengah lingkaran berjari-jari satu dari  $(-1, 0)$  ke  $(1, 0)$ . Fungsi setengah lingkaran diberikan oleh  $y = \sqrt{1-x^2}$ , sehingga  $dy = \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . Dengan

$$\text{demikian } \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \frac{-\sqrt{1-x^2} dx - x^2/\sqrt{1-x^2} dx}{1} = \int_{-1}^1 \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin(x) \Big|_{-1}^1 = -\pi.$$

*Contoh 6.3.* Selesaikan persoalan pada kasus 6.2. dengan cara parametrisasi. Untuk memudahkan, lintasan tersebut akan diparametrisasi sehingga  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$  dan  $x^2 + y^2 = 1$ , dimana  $\theta$  adalah parameternya dan batas-batas integrasinya adalah dari  $\theta = \pi$  sampai  $\theta = 0$ . Karena  $dx = -\sin \theta d\theta$  dan  $dy = \cos \theta d\theta$ , maka diperoleh

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\pi}^0 \frac{-\sin \theta(-\sin \theta d\theta) + \cos \theta(\cos \theta d\theta)}{1} = \int_{\pi}^0 d\theta = -\pi. \text{ Jelas cara parametrisasi ini}$$

lebih memudahkan.

#### 4.1. Medan Konservatif dan Medan Potensial

Dalam melakukan integrasi garis dapat dijumpai beberapa medan gaya  $\vec{F}$  yang jika diintegrasikan dari suatu posisi ke posisi yang lain akan menghasilkan harga yang tidak bergantung pada bentuk lintasan yang dilalui. Konsekuensinya, jika posisi awal dan akhirnya sama atau dengan kata lain lintasannya membentuk kurva tertutup maka:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{15}$$

dimana simbol  $\oint$  menyatakan integral garis dalam lintasan tertutup. Medan yang memiliki sifat seperti ini disebut sebagai medan konservatif atau medan yang bersifat kekal.

Misalkan kita memiliki suatu fungsi skalar  $V = V(x, y, z)$  sedemikian sehingga medan gaya dapat dinyatakan sebagai negatif **grad**  $V$  atau  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ , maka:

$$-\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV \quad (16)$$

Misalkan posisi awal benda berada di  $A$  dan posisi akhirnya di  $B$  diperoleh:

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B) = -\Delta V \quad (17)$$

sehingga jelas jika posisi awal dan akhir sama maka  $W = 0$ . Dengan memanfaatkan persamaan (16) diperoleh kondisi

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}V = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (18)$$

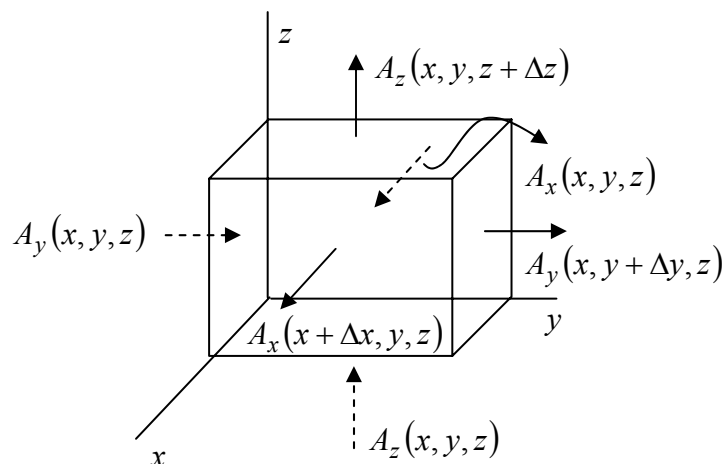
Secara umum, sebuah medan vektor konservatif memiliki rotasi nol. Secara khusus, medan skalar  $V$  dinamakan sebagai medan potensial skalar.

## 5. Teorema Divergensi

Telah didefinisikan pada persamaan (8) bahwa bentuk divergensi sebuah medan vektor  $\vec{A}$  diberikan oleh:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (19)$$

Untuk mengetahui arti fisis dari ungkapan (19) ini, tinjau medan  $\vec{A}$  yang bekerja pada elemen kotak berukuran  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  dengan volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ , yang salah satu titik sudut berada di  $(x, y, z)$  seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1.



Gambar 1

Bayangkan bahwa elemen kotak ini merupakan bagian kecil dari suatu volume yang lebih besar. Kita anggap medan  $\vec{A}$  sebagai rapat fluks persatuan luas, sehingga fluks  $I_{in}$  atau "jumlah" medan yang memasuki kotak dalam arah  $(x, y, z)$  berturut-turut diberikan oleh:

$$\begin{aligned} I_{in,x} &= A_x(x, y, z)\Delta y\Delta z \\ I_{in,y} &= A_y(x, y, z)\Delta z\Delta x \\ I_{in,z} &= A_z(x, y, z)\Delta x\Delta y \end{aligned} \quad (20)$$

Sementara fluks  $I_{out}$  yang keluar dari kotak dalam arah  $(x, y, z)$  berturut-turut diberikan oleh:

$$\begin{aligned} I_{out,x} &= A_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y\Delta z \\ I_{out,y} &= A_y(x, y + \Delta y, z)\Delta z\Delta x \\ I_{out,z} &= A_z(x, y, z + \Delta z)\Delta x\Delta y \end{aligned} \quad (21)$$

Dari sini diperoleh jumlah bersih (netto),  $I_{net} = I_{out} - I_{in}$ , total:

$$\begin{aligned} I_{net} &= [A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)]\Delta y\Delta z \\ &+ [A_y(x, y + \Delta y, z) - A_y(x, y, z)]\Delta z\Delta x \\ &+ [A_z(x, y, z + \Delta z) - A_z(x, y, z)]\Delta x\Delta y \end{aligned} \quad (22)$$

Kini kita tinjau fluks netto persatuan volume,  $\rho = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{I_{net}}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \frac{I_{net}}{dV}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)}{\Delta x} \right] \\ + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{A_y(x, y + \Delta y, z) - A_y(x, y, z)}{\Delta y} \right] \\ + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{A_z(x, y, z + \Delta z) - A_z(x, y, z)}{\Delta z} \right] \end{aligned}$$

dengan  $dV = dx dy dz$ , sehingga:

$$\rho = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (23)$$



Sekarang perhatikan kembali bahwa ungkapan (22) untuk dapat dituliskan dalam bentuk (buktikan!):

$$I_{in} = \oiint_{S_{elemen,in}} \vec{A}_{in} \cdot d\vec{S}_{in} \quad (24)$$

dengan  $d\vec{S}_{in} = dydz\vec{e}_x + dzdx\vec{e}_y + dxdy\vec{e}_z$  yang menyatakan vektor satuan permukaan elemen kotak yang dimasuki fluks medan dan medan  $\vec{A}_{in}$  adalah medan yang terdefinisi pada permukaan masuk tersebut. Sedangkan untuk fluks keluar dapat dituliskan sebagai:

$$I_{out} = \oiint_{S_{elemen,out}} \vec{A}_{out} \cdot d\vec{S}_{out} \quad (25)$$

dengan  $d\vec{S}_{out} = -d\vec{S}_{in}$  yang menyatakan vektor satuan permukaan elemen kotak tempat fluks medan keluar dan medan  $\vec{A}_{out}$  adalah medan yang terdefinisi di permukaan keluar yang dimaksud. Sehingga dengan demikian secara umum dapat dituliskan fluks netto (22) dapat dituliskan sebagai:

$$I_{net} = \oiint_{S_{elemen}} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (26)$$

Dari sini dapat kita simpulkan untuk setiap elemen kotak,

$$I_{net} = \iiint_{V_{elemen}} \rho dV = \oiint_{S_{elemen}} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (27)$$

Jika kita lakukan penjumlahan terhadap seluruh elemen volume sehingga mencakup seluruh volume  $V$  geometri yang ditinjau dengan  $S$  merupakan permukaan yang melingkupinya, maka diperoleh:

$$\iiint_V \rho dV = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (28)$$

Berdasarkan hubungan (23) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (29)$$

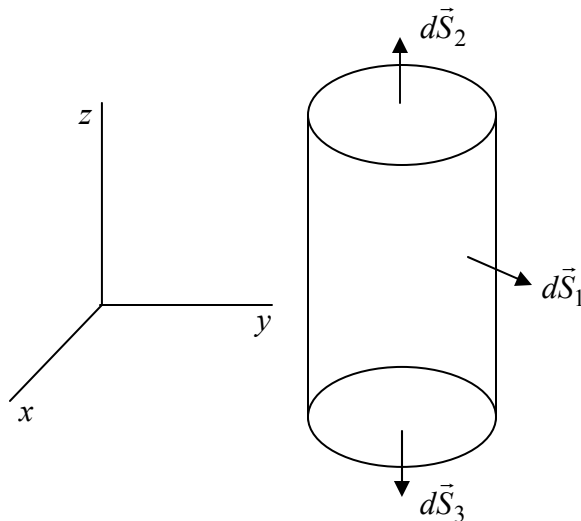
Hubungan yang diberikan pada persamaan (29) dikenal sebagai *Teorema Divergensi* yang menyatakan bahwa untuk menghitung total divergensi di seluruh titik, cukup dilakukan dengan menghitung jumlah fluks yang keluar dari permukaan yang

melingkupi volume terkait, atau sebaliknya, kita dapat menghitung total fluks yang keluar dengan menghitung divergensi total di tiap titik dalam volume tersebut.

*Contoh 6.4.* Misalkan medan vektor  $\vec{A} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  terdefinisi pada sebuah silinder dengan jari-jari  $a$  dan tinggi  $h$ . Tentukan fluks total yang keluar/masuk pada silinder tersebut. Dalam koordinat silinder medan vektor  $\vec{A} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$  (buktikan). Cara

pertama:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$ , tentukan kemudian  $\iiint_{V_{\text{silinder}}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV$ . Dari diskusi pada

bab 5, bentuk integral lipat tiga-nya adalah sebagai berikut:  $\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (3)\rho d\phi d\rho dz = 3\pi a^2 h$ .



Cara kedua: perhatikan gambar di atas, bahwa permukaan silinder dapat dibagi menjadi tiga permukaan dengan masing-masing vektor normal permukaan  $d\vec{S}_1 = \rho d\phi dz \vec{e}_\rho$ ,  $d\vec{S}_2 = \rho d\phi d\rho \vec{e}_z$  dan  $d\vec{S}_3 = -\rho d\phi d\rho \vec{e}_z$ . Kemudian tentukan integral permukaan berikut:

$$\oiint_{S_{\text{silinder}}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{A}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{A}_3 \cdot d\vec{S}_3. \quad \text{Berdasarkan ketiga permukaan}$$

tersebut diperoleh tiga integral lipat dua berikut:

(1). Pada permukaan 1,  $\vec{A}_1 = a\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$  dengan  $\rho = a$ , sehingga integral permukaannya adalah:

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} (a\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \cdot (\rho d\phi dz \vec{e}_\rho) = \int_0^h \int_0^{2\pi} a^2 d\phi dz = 2\pi a^2 h$$

(2). Pada permukaan 2,  $\vec{A}_2 = \rho \vec{e}_\rho + h \vec{e}_z$ , dengan  $z = h$ , sehingga integral permukaannya adalah:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} (\rho \vec{e}_\rho + h \vec{e}_z) \cdot (\rho d\phi d\rho \vec{e}_z) = \int_0^a \int_0^{2\pi} h \rho d\phi d\rho = \pi a^2 h$$

(3). Untuk permukaan 3, pada  $z = 0$ ,  $\vec{A}_3 = \rho \vec{e}_\rho$ , dan integral permukaannya adalah:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} (\rho \vec{e}_\rho) \cdot (\rho d\phi d\rho \vec{e}_z) = 0$$

Dengan demikian jumlah ketiganya adalah:  $3\pi a^2 h$ , sama seperti hasil yang diperoleh dengan cara pertama, sehingga teorema divergensi (29) terbukti.

## 6. Teorema Stokes

Misalkan kita memiliki dua buah fungsi  $U(x, y)$  dan  $V(x, y)$ . Kemudian kita integral garis-kan keduanya pada sebuah kurva persegi  $C_{elemen}$  dengan arah berlawanan jarum jam dalam bentuk:

$$\oint_{C_{elemen}} [U(x, y)dx + V(x, y)dy] \quad (30)$$

dengan kurva  $C_{elemen}$  diberikan dalam Gambar 2 merupakan lintasan persegi tertutup  $a - b - c - d - a$ . Kita tinjau ruas pertama ungkapan (30):

$$\oint_{C_{elemen}} U(x, y)dx = \int_a^b U(x, a)dx + \int_c^d U(x, d)dx \quad (31)$$

sebagai akibat dari lintasan  $c - d$  berlawanan dengan  $a - b$  maka:

$$\begin{aligned} \oint_{C_{elemen}} U(x, y)dx &= \int_a^b U(x, a)dx - \int_a^b U(x, d)dx \\ &= \int_a^b [U(x, a) - U(x, d)]dx \end{aligned} \quad (32)$$

Sekarang kita tinjau hubungan berikut:

$$\iint_{S_{elemen}} \frac{\partial U}{\partial y} dydx = \int_d^c \int_a^b \frac{\partial U}{\partial y} dydx = \int_d^c [U(x, d) - U(x, a)]dx \quad (33)$$

Karena lintasan  $d - c$  sama dengan lintasan  $a - b$ , maka:

$$\int_d^c [U(x, d) - U(x, a)] dx = \int_a^b [U(x, d) - U(x, a)] dx \quad (34)$$

Jelas terlihat dari persamaan (31) dan (33) bahwa:

$$\oint_{C_{elemen}} U(x, y) dx = - \iint_{S_{elemen}} \frac{\partial U}{\partial y} dy dx \quad (35)$$

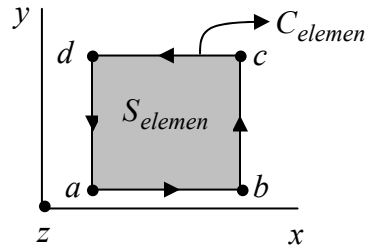
Dengan menggunakan cara yang sama untuk fungsi  $V(x, y)$  diperoleh hubungan berikut:

$$\oint_{C_{elemen}} V(x, y) dy = \iint_{S_{elemen}} \frac{\partial V}{\partial x} dx dy \quad (36)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh hubungan berikut:

$$\oint_{C_{elemen}} [U(x, y) dx + V(x, y) dy] = \iint_{S_{elemen}} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy \quad (37)$$

Hubungan pada persamaan (37) dikenal sebagai Teorema Green pada Bidang.



Gambar 2

Selanjutnya kita tinjau integral garis dari sebuah medan vektor sebarang  $\vec{A}$ ,  $\oint_{C_{elemen}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$  pada pada suatu elemen kurva persegi di bidang  $x - y$  seperti yang diberikan

pada Gambar 2, sehingga:

$$\oint_{C_{elemen}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_{elemen}} (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) = \oint_{C_{elemen}} (A_x dx + A_y dy) \quad (38)$$

Berdasarkan teorema Green yang diberikan pada persamaan (37) kita dapatkan:

$$\oint_{C_{elemen}} (A_x dx + A_y dy) = \iint_{S_{elemen}} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (39)$$

Dapat dibuktikan bahwa ruas kanan persamaan (33) bisa dinyatakan dalam bentuk:

$$\iint_{S_{elemen}} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{S_{elemen}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{e}_z dx dy = \iint_{S_{elemen}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_z \quad (40)$$

dengan  $d\vec{S}_z$  adalah vektor normal bidang  $x - y$ . Dengan demikian kita peroleh:

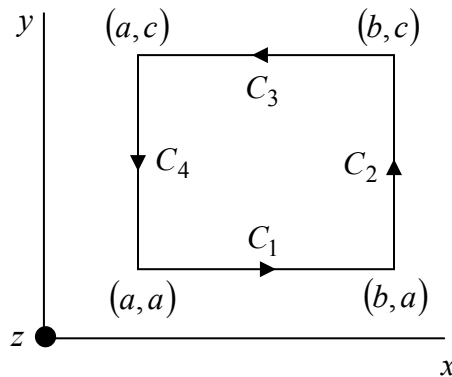
$$\oint_{C_{elemen}} (A_x dx + A_y dy) = \iint_{S_{elemen}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_z \quad (41)$$

Jika kita melakukan penjumlahan terhadap sejumlah elemen luas yang membentuk sebuah permukaan sebarang  $S$  diperoleh secara umum bentuk berikut:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (42)$$

Hubungan ini dikenal sebagai *Teorema Stokes*. Dalam teorema ini diperlihatkan bahwa untuk menghitung rotasi dari suatu medan vektor pada suatu permukaan sama saja dengan menghitung integral garis medan tersebut pada kurva yang melingkupi permukaan tersebut.

*Contoh 6.5.* Misalkan pada suatu kotak persegi sebagaimana diberikan pada gambar di bawah terdefinisi medan vektor  $\vec{A} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ . Buktikan bahwa teorema stokes (42) berlaku.



Diperoleh:  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 2\vec{e}_z$  (buktikan!) dan vektor normal permukaannya adalah

$$d\vec{S} = dx dy \vec{e}_z, \text{ sehingga } \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_a^b \int_a^c (2\vec{e}_z) \cdot dx dy \vec{e}_z = \int_a^b \int_a^c 2 dx dy = 2(b-a)(c-a).$$

Selanjutnya untuk  $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C (A_x dx + A_y dy)$  berdasarkan arah lintasan yang berlawanan

arah dengan jarum jam diperoleh:

$$\begin{aligned} \oint_C (A_x dx + A_y dy) &= \int_{C_1} A_x dx + \int_{C_2} A_y dy + \int_{C_3} A_x dx + \int_{C_4} A_y dy \\ &= \int_a^b (-a) dx + \int_a^c (b) dy + \int_b^a (-c) dx + \int_c^a (a) dy \\ &= -a(b-a) + b(c-a) - c(a-b) + a(a-c) \\ &= 2(b-a)(c-a) \end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa teorema stokes berlaku pada kasus di atas.

## 7. Contoh Penerapan dalam Fisika

Selain contoh penerapan integral garis dalam menghitung usaha yang dilakukan oleh sebuah medan gaya seperti yang telah dibahas sebelumnya pada pasal 5, maka kajian gejala elektromagnetik merupakan contoh cabang Fisika yang paling banyak memanfaatkan analisis vektor dalam penggambarannya. Sejak abad ke 19, telah diketahui bahwa persamaan yang mengendalikan dinamika elektromagnetik adalah perangkat persamaan Maxwell. Untuk kasus gejala elektromagnetik yang tidak bergantung terhadap waktu dan di posisi yang terdapat rapat muatan dan rapat arus, persamaan tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (43a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (43b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (43c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (43d)$$

dimana  $\vec{E}$  adalah medan listrik,  $\vec{B}$  medan magnet, dan  $\rho$  serta  $\vec{J}$  berturut-turut adalah rapat muatan persatuan volume dan vektor rapat arus persatuan luas.

Integrasi persamaan (43a) terhadap seluruh volume ruang diberikan oleh:

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad (44)$$

Tinjau penerapan teorema divergensi pada ruas kiri persamaan (44) menghasilkan:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (45)$$

Dipihak lain, ruas kanan persamaan (44) tidak lain adalah:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (46)$$

dimana  $Q$  adalah muatan total. Sehingga dengan demikian kita dapatkan bahwa:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (47)$$

Karena integral pada ruas kanan persamaan (47) dapat ditafsirkan sebagai fluks total yang menembus permukaan  $S$ , maka kita dapat mengatakan bahwa fluks tersebut sebanding dengan muatan total yang dilingkupi oleh permukaan tersebut. Persamaan (47) juga dikenal sebagai Hukum Gauss.

Di pihak lain, integrasi perkalian titik antara persamaan (43d) dengan vektor normal dari elemen luas suatu permukaan tertutup  $S$  diberikan oleh:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (48)$$

Untuk ruas kanan persamaan (48), ungkapan  $\vec{J} \cdot d\vec{S}$ , yang merupakan perkalian titik antara rapat arus persatuan luas dengan vektor normal permukaan, menghasilkan total arus yang searah dengan normal permukaan atau  $\vec{J} \cdot d\vec{S} = dI$ , sehingga dengan demikian:

$$\mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S dI = \mu_0 I \quad (49)$$

Kemudian berdasarkan teorema stokes, ruas kiri persamaan (48) dapat dituliskan sebagai:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} \quad (50)$$

dimana  $C$  adalah kurva tertutup yang membatasi permukaan terbuka  $S$ . Samakan persamaan (49) dan (50) berdasarkan persamaan (48) diperoleh:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I \quad (51)$$

dengan  $I$  menyatakan total arus yang menembus permukaan yang dibatasi oleh kurva tertutup  $C$ .

Hubungan pada persamaan (51) dikenal sebagai hukum Ampere yang dapat ditafsirkan sebagai berikut: misalkan kita mengetahui distribusi medan magnet di suatu kurva tertutup  $C$ , maka kita dapat mengetahui seberapa besar total arus yang menghasilkan distribusi medan magnet tersebut



## BAB 7

### DERET FOURIER

#### 1. Pendahuluan

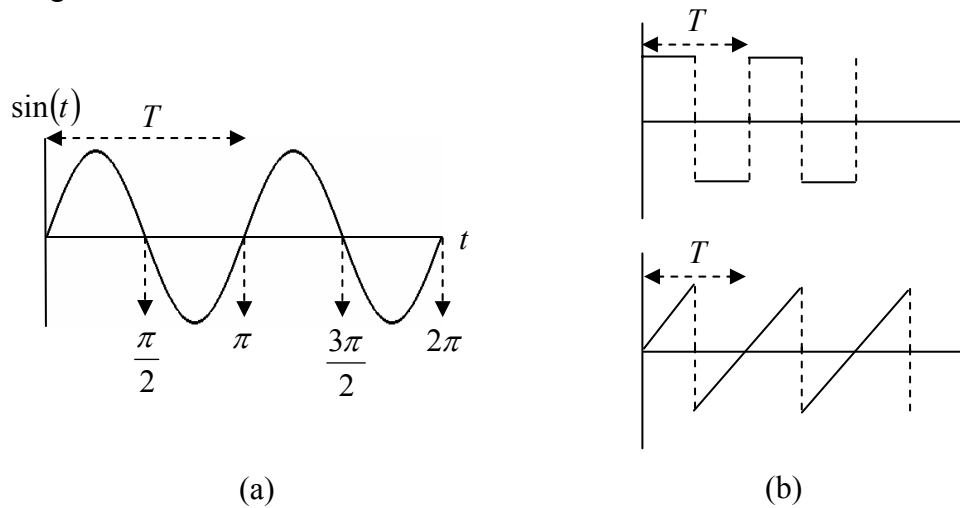
Dalam permasalahan Fisika, banyak gejala yang dipelajari terkait dengan dinamika yang berulang-ulang atau periodik, seperti getaran atau osilasi. Contoh yang paling sederhana adalah gerakan berulang pada gerak harmonik sederhana oleh pegas yang membentuk fungsi sinusoidal jika kita gambarkan hubungan antara posisi dengan waktu. Di pihak lain, kadang kita dihadapkan pula pada permasalahan yang terkait dengan struktur yang memiliki periodisitas, seperti contohnya perambatan cahaya ketika melalui medium berlapis-lapis yang memiliki struktur lapisan periodik.

Secara umum, gejala atau struktur periodik yang diamati tidak memiliki bentuk sesederhana fungsi sinusoidal, bahkan seringkali tidak memiliki bentuk ungkapan analitik yang kita kenal. Untuk menangani permasalahan yang terkait dengan sistem periodik tersebut, maka kita dapat menggunakan uraian deret dengan fungsi-fungsi sinusoidal sebagai basisnya. Jika pada bab 1 kita telah berkenalan dengan uraian Taylor yang menjabarkan suatu fungsi berdasarkan deret pangkat, maka pada bab ini kita akan membahas perumusan yang kurang lebih sama tetapi diterapkan khusus pada fungsi-fungsi periodik yang secara umum tidak memiliki bentuk ungkapan analitik.

#### 2. Fungsi Periodik

Sebuah fungsi yang terkait dengan suatu variabel tertentu dikatakan periodik jika bentuknya akan kembali berulang setelah rentang tertentu. Misalkan fungsi tersebut merupakan fungsi dari waktu  $t$ , jika  $f(t) = f(t + nT)$ , dimana  $n$  adalah sebuah bilangan integer, maka fungsi tersebut mendefinisikan sebuah fungsi periodik dengan kuantitas  $T$  dinamakan periode dari fungsi tersebut. Contoh sederhana dari fungsi seperti ini adalah fungsi  $\sin(t)$ , dengan  $t$  dalam radian. Telah kita ketahui akan memiliki harga yang sama pada  $t + n2\pi$  atau  $\sin(t) = \sin(t + n2\pi)$ . Dalam hal ini jelas bahwa  $T = 2\pi$ . Sekarang kita tinjau fungsi  $\sin(2t)$ , maka seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1(a), jelas terlihat fungsi tersebut memiliki periode  $T = \pi$ . Sebagai contoh fungsi periodik yang lebih kompleks dan tidak memiliki fungsi analitik tetapi tidak berkelakuan baik dapat

dilihat pada Gambar 1(b). Terlihat bahwa kedua fungsi pada contoh tersebut diskontinu (tidak-kontinu) serta tidak memiliki turunan di titik-titik tertentu yang jumlahnya berhingga, sehingga dikatakan tidak berkelakuan baik. Fungsi-fungsi semacam ini kerap kali ditemukan pada pembahasan mengenai pengolahan sinyal dalam kajian gelombang.



Gambar 1

### 3. Deret Fourier

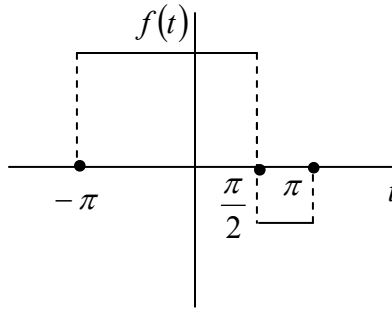
Terlihat pula dari perbandingan antara fungsi pada Gambar 1(a) dengan Gambar 1(b) terdapat kemiripan bentuk. Berdasarkan fakta ini, maka fungsi-fungsi pada Gambar 1(b) tersebut, yang akan diperlihatkan pada diskusi berikut, dapat didekati secara deret dengan memanfaatkan fungsi-fungsi sinusoidal yang berbeda periodisitas.

#### 3.1. Deret Fourier dengan Periodisitas $2\pi$

Kita tinjau terlebih dahulu fungsi  $f(t)$  dengan periodisitas  $T = 2\pi$ . Serupa dengan uraian deret pangkat pada bab 1, kita asumsikan bahwa fungsi tersebut dapat diuraikan kedalam deret berikut:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nt) \quad (1)$$

yang selanjutnya akan kita sebut sebagai deret Fourier (baca: Fuye). Kita tinjau sekali lagi ilustrasi pada Gambar 2 yang merupakan bagian dari suatu fungsi periodik dalam rentang  $t = -\pi$  sampai  $\pi$ .



Gambar 2

Untuk mencari koefisien  $a_0$  yang terdapat pada ungkapan deret Fourier pada persamaan (1), kita akan memanfaatkan beberapa integral berikut (buktikan!):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt = -\cos(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (2a)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt = \sin(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (2b)$$

Integralkan kedua ruas pada persamaan (1) dalam rentang yang dimaksud diperoleh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = a_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dt}_{=2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt}_{=0} \quad (3)$$

sehingga diperoleh

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad (4)$$

Selanjutnya, untuk menentukan koefisien-koefisien  $a$ , kita tinjau integral berikut:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m-n)t) - \cos((m+n)t)] dt \quad (5)$$

Ruas kanan pada persamaan (5) diperoleh dengan memanfaatkan identitas trigonometri:

$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$ . Terlihat bahwa untuk  $m \neq n$ , maka (buktikan!):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = 0 \quad (6)$$

Sedangkan untuk  $m = n$ , maka (buktikan juga!):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos(2nt)]dt = \pi \quad (7)$$

Secara sederhana integral tersebut dapat kita tuliskan sebagai:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = \pi\delta_{nm} \quad (8)$$

dengan  $\delta_{nm}$  adalah delta kronecker yang telah kita bahas pada bab 3 terdahulu.

Selanjutnya kita tinjau integral berikut:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(mt)dt = \int_{-\pi}^{\pi} [\sin((m+n)t) + \sin((m-n)t)]dt \quad (9)$$

Ruas kanan pada persamaan (9) diperoleh dengan memanfaatkan identitas trigonometri:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)].$$

Dengan demikian, berdasarkan integral-integral di atas, maka jika kita kalikan kedua ruas pada persamaan (1) dengan  $\sin(mt)$  didapatkan:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)dt &= a_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)dt}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt}_{=\pi\delta_{nm}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(mt)dt}_{=0} \end{aligned} \quad (10)$$

Pada hasil di atas telah digunakan hubungan:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{nm} = a_m$ , maka diperoleh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)dt = a_m \pi \quad (11)$$

sehingga:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)dt \quad (12)$$

Dengan cara yang persis sama, tetapi dengan mengalikan kedua ruas persamaan (1) dengan  $\cos(mt)$  dan kembali menggunakan identitas trigonometri yang bersesuaian, diperoleh untuk koefisien-koefisien  $b$  :

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt \quad (13)$$

*Contoh 7.1.* Tentukan deret Fourier untuk fungsi yang diberikan pada Gambar 2. Pertama, kita nyatakan terlebih dulu fungsi tersebut dalam bentuk berikut:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t \leq \pi/2 \\ -1/2, & \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Selanjutnya kita cari koefisien  $a_0$  berdasarkan persamaan (4):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} (1) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (-1/2) dt = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Untuk koefisien  $a_n$  :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} (1) \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (-1/2) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)] + \frac{1}{2n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)] \\ &= \frac{3}{2n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)] \end{aligned}$$

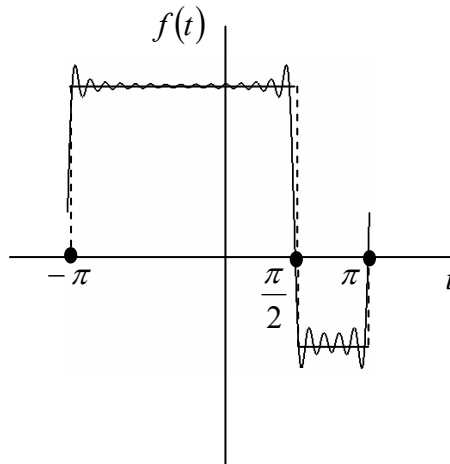
Sedangkan untuk koefisien  $b_n$  :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} (1) \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (-1/2) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} [\sin(n\pi) + \sin(n\pi/2)] + \frac{1}{2n\pi} [\sin(n\pi/2) - \sin(n\pi)] \\ &= \frac{1}{2n\pi} [3 \sin(n\pi/2) + \sin(n\pi)] \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh deret Fourier yang dimaksud adalah:

$$f(t) = \frac{5}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)] \sin(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} [3 \sin(n\pi/2) + \sin(n\pi)] \cos(nt)$$

Diberikan pada Gambar 3 plot dari deret Fourier yang diperoleh pada contoh 7.1 sampai dengan  $n = 20$  dengan menggunakan aplikasi MAPLE 8. Terlihat bahwa deret yang diplotkan memiliki kecenderungan membentuk fungsi yang dimaksud. Pembaca dapat meyakini diri bahwa semakin besar  $n$  yang disertakan maka hasil yang diperoleh akan makin mendekati.



Gambar 3

### 3.2. Deret Fourier dengan Periodisitas Sebarang

Jika pada bagian awal pasal 3 kita membahas khusus untuk fungsi dengan periodisitas  $2\pi$ , maka perluasan perumusan deret Fourier untuk kasus dengan periodisitas sebarang, sebut saja  $T$  yang bukan dinyatakan dalam radian, dapat dilakukan dengan mentransformasikan argumen pada fungsi sinus cosinus yang terkait kedalam bentuk radian sebagai berikut:

$$t \rightarrow \frac{2\pi t}{T} \quad (14)$$

Sehingga kini kita peroleh untuk fungsi dengan periodisitas  $T$ :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n\pi t/T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2n\pi t/T) \quad (15a)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (15b)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n2\pi t/T) dt \quad (15c)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n 2\pi t/T) dt \quad (15d)$$

Perhatikan bahwa untuk periodisitas  $T = 2\pi$ , ungkapan bagi deret Fourer dan masing-masing koefisien akan kembali ke bentuk yang diberikan oleh persamaan (1), (4), (12) dan (13) berturut-turut.

Perlu dicatat Jika pembaca mengacu pada buku teks karangan Mary L. Boas, maka akan dijumpai bahwa ungkapan untuk uraian Fourier diberikan oleh:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi t/T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n\pi t/T) \quad (16)$$

dengan perbedaan pada penulisan koefisien  $a_0$  dan penempatan fungsi kosinus pada koefisien  $a_n$  dan sinus pada koefisien  $b_n$  yang berbeda dengan penulisan yang diberikan pada persamaan (1). Konsekuensi dari penulisan ini adalah ungkapan bagi  $a_0$ ,  $a_n$  dan  $b_n$  diberikan oleh:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (17a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n 2\pi t/T) dt \quad (17a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n 2\pi t/T) dt \quad (17b)$$

### 3.3. Deret Fourier Fungsi Genap dan Ganjil

Sebuah fungsi dikatakan sebagai fungsi genap jika memenuhi kondisi  $f(-t) = f(t)$  seperti yang diilustrasikan pada Gambar 4(a) dan dikatakan merupakan fungsi ganjil jika  $f(-t) = -f(t)$ , dengan ilustrasinya diberikan pada Gambar 4(b).

Untuk fungsi genap, ketika kita menghitung koefisien  $a_n$  berdasarkan persamaan (15b) terlihat bahwa  $f(t)$  positif (atau dapat pula negatif) untuk seluruh selang  $T$ , sementara di pihak lain kita ketahui bahwa fungsi  $\sin(n 2\pi t/T) = -\sin(-n 2\pi t/T)$

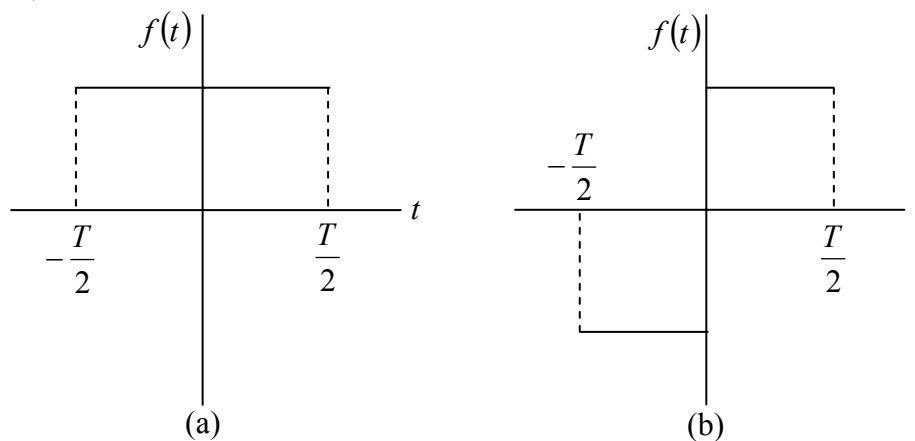
merupakan fungsi ganjil. Konsekuensi dari keadaan ini adalah bahwa  $a_n = 0$ . Hal ini terlihat dari integral untuk memperoleh koefisien  $a_n$  berikut:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t) \sin(n 2\pi t/T) dt + \int_0^{T/2} f(t) \sin(n 2\pi t/T) dt \quad (18)$$

yang dapat dengan mudah kita lihat bahwa:

$$\int_0^{T/2} f(t) \sin(n 2\pi t/T) dt = - \int_{-T/2}^0 f(t) \sin(n 2\pi t/T) dt \quad (19)$$

sehingga  $a_n = 0$ .



Gambar 4

Sedangkan untuk koefisien  $b_n$ , karena  $\cos(n 2\pi t/T) = \cos(-n 2\pi t/T)$ , maka diperoleh kondisi berikut (buktikan!):

$$\int_0^{T/2} f(t) \cos(n 2\pi t/T) dt = \int_{-T/2}^0 f(t) \cos(n 2\pi t/T) dt \quad (20)$$

Sehingga dengan demikian untuk koefisien  $b_n$  bagi fungsi genap adalah:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n 2\pi t/T) dt \quad (21)$$

Dengan cara yang sama seperti untuk fungsi genap, kita peroleh untuk fungsi ganjil kondisi:

$$\int_0^{T/2} f(t) \cos(n 2\pi t/T) dt = - \int_{-T/2}^0 f(t) \cos(n 2\pi t/T) dt \quad (22)$$



sehingga diperoleh  $b_n = 0$ , sedangkan dari kondisi:

$$\int_0^{T/2} f(t) \sin(n 2\pi t/T) dt = \int_{-T/2}^0 f(t) \sin(n 2\pi t/T) dt \quad (23)$$

diperoleh untuk koefisien  $a_n$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n 2\pi t/T) dt \quad (24)$$

### 3.4. Deret Fourier Kompleks

Selain dari uraian deret Fourier dalam basis fungsi sinus dan kosinus yang diberikan pada persamaan (1), kita dapat pula membentuk uraian tersebut dalam basis fungsi eksponensial kompleks berikut:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i 2n\pi t/T) \quad (25)$$

Perhatikan bahwa penjumlahan dilakukan dari  $n = -\infty$  sampai  $\infty$ . Dengan melakukan kembali prosedur seperti ketika memperoleh koefisien  $a_n$  dan  $b_n$  pada persamaan (12) dan (13) berturut-turut, maka kita dapat pula menerapkannya untuk memperoleh koefisien  $c_n$  pada persamaan (25) di atas dengan mengalikan kedua ruas dengan  $\exp(-imt)$  kemudian mengintegalkannya dalam rentang  $-T/2$  sampai  $T/2$  sebagai berikut:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i 2m\pi t/T) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i 2n\pi t/T) \exp(-i 2m\pi t/T) dt \quad (26)$$

Kita evaluasi integral pada ruas kanan persamaan (17) dengan memanfaatkan hubungan Euler  $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i 2n\pi t/T) \exp(-i 2m\pi t/T) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \exp[i 2(n-m)\pi t/T] dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos[2(n-m)\pi t/T] dt + i \int_{-T/2}^{T/2} \sin[2(n-m)\pi t/T] dt \end{aligned} \quad (27)$$

Dari sini terlihat bahwa (buktikan!):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos[2(n-m)\pi t/T] dt = T\delta_{nm} \quad (28a)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin[2(n-m)\pi t/T] dt = 0 \quad (28b)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh bahwa persamaan (17) berubah menjadi:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i2m\pi t/T) dt = T \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nm}}_{c_m} \quad (29)$$

sehingga:

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i2m\pi t/T) dt \quad (30)$$

*Contoh 7.2.* Nyatakan fungsi yang diberikan pada contoh 7.1 dalam uraian deret Fourier kompleks. Dari pernyataan fungsi tersebut dalam bentuk berikut:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t \leq \pi/2 \\ -1/2, & \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

dengan  $T = 2\pi$ , kita peroleh untuk koefisien  $c_n$  untuk  $n \neq 0$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi/2} (1) \exp(-int) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (-1/2) \exp(-int) dt \\ &= \frac{1}{2n\pi} [\exp(-in\pi/2) - \exp(in\pi)] - \frac{1}{4n\pi} [\exp(-in\pi) - \exp(-in\pi/2)] \\ &= \frac{1}{4n\pi} [3\exp(-in\pi/2) - 2\exp(in\pi) - \exp(-in\pi)] \end{aligned}$$

Sedangkan untuk koefisien  $c_0$  ditentukan oleh integral:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

yang tidak lain sama dengan  $a_0$  pada persamaan (4) atau (15a) dengan  $T = 2\pi$ .

Sehingga untuk kasus pada contoh ini  $c_0 = 5/8$ , sebagaimana yang diperoleh pada contoh

7.1. Ungkapan deret Fourier dalam basis fungsi eksponensial kompleks untuk kasus di

$$\text{atas adalah: } f(t) = \frac{5}{8} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{1}{4n\pi} [3 \exp(-in\pi/2) - 2 \exp(in\pi) - \exp(-in\pi)] \exp(int).$$

#### 4. Kondisi Dirichlet dan Teorema Parseval

Setelah kita membahas bagaimana menguraikan suatu fungsi periodik dalam deret Fourier, kini kita akan membahas dua kelengkapan yang dimiliki oleh deret tersebut yakni kondisi Dirichlet yang terkait dengan konvergensi deret tersebut, dan nilai deret tersebut pada titik diskontinu yang terdapat pada fungsi yang ditinjau seperti dicontohkan pada Gambar 1(b), dan teorema Parseval yang terkait dengan harga rata-rata suatu periodik dalam satu periode.

##### 4.1. Kondisi Dirichlet

Misalkan sebuah fungsi periodik  $f(t)$  dengan periode  $T$  yang dalam suatu selang antara  $-T/2$  sampai  $T/2$  memiliki harga yang tunggal untuk setiap titik yang bukan titik diskontinu dan juga memiliki titik diskontinu yang terbatas jumlahnya, serta

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty \quad (31)$$

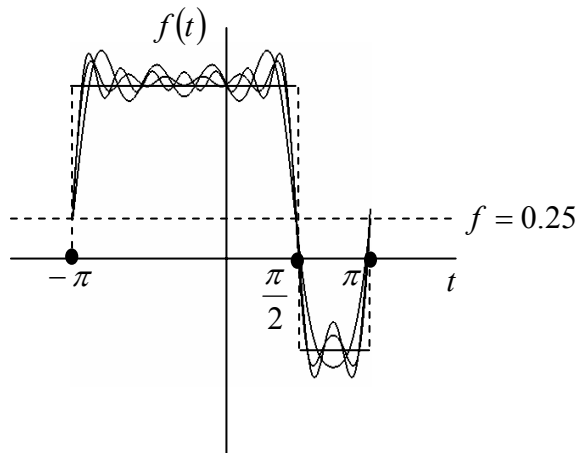
maka deret Fourier di titik  $t$  tertentu akan konvergen ke nilai  $f(t)$  di semua titik dimana  $f(t)$  kontinu. Sedangkan pada titik diskontinu, deret Fourier tersebut akan konvergen ke nilai tengah fungsi tersebut.

Kembali ke contoh 7.1, jika kita hitung integral:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(t)| dt + \int_{\pi/2}^{\pi} |f(t)| dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (1/2) dt = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi < \infty \end{aligned}$$

yang terbatas nilainya. Kemudian perhatikan bahwa nilai deret tersebut untuk  $n = 5, 7, 9$  yang diberikan pada Gambar 5, menunjukkan bahwa pada titik diskontinu yakni  $t = -\pi/2, \pi/2,$  dan  $\pi$  deret tersebut konvergen menuju nilai tengah yakni  $f = 0.25$ .

Dapat disimpulkan, bahwa melalui kondisi dirichlet ini kita dapat menentukan apakah suatu fungsi akan memiliki deret Fourier yang konvergen atau tidak.



Gambar 5

*Contoh 7.3.* Misalkan dalam suatu selang kita memiliki fungsi  $f(t) = 1/t$  dengan periode dari  $t = 0$  sampai  $2\pi$ . Tentukan apakah fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam deret Fourier yang konvergen. Kita periksa:  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{t} dt = \ln(t) \Big|_0^{2\pi} = -\infty$ , sehingga dengan demikian untuk fungsi tersebut tidak dapat dinyatakan dalam bentuk deret Fourier yang konvergen di setiap titik dalam selang tersebut.

#### 4.2. Teorema Parseval

Misalkan sebuah fungsi periodik  $f(t)$  dengan periode  $T$  yang dalam suatu selang antara  $-T/2$  sampai  $T/2$ , berdasarkan kondisi Dirichlet, dapat diuraikan ke dalam deret Fourier. Jika kita tinjau rata-rata dari kuadrat  $f(t)$  berikut:

$$\langle f(t)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2 dt \quad (32)$$

maka berlaku:

$$\langle f(t)^2 \rangle = \frac{1}{2} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \quad (33)$$

Pernyataan pada persamaan (33) dikenal sebagai teorema Parseval, yang menggambarkan hubungan kelengkapan antara rata-rata kuadrat fungsi  $f(t)$  dengan koefisien-koefisien pada deret Fourier bersangkutan.

## 5. Contoh Penerapan dalam Fisika

Konsep deret Fourier dalam Fisika secara luas digunakan pada kajian mengenai gejala gelombang, kuantum dan masih banyak lainnya. Dalam gelombang misalnya, penentuan frekuensi dari suatu sinyal suara atau cahaya, yang bukan berbentuk sinusoidal dengan frekuensi tunggal dilakukan dengan menjabarkan fungsi sinyal tersebut terhadap waktu ke dalam deret Fourier. Kita ambil contoh 7.1 kembali dengan mengandaikan bahwa fungsi yang diberikan pada Gambar 2 adalah intensitas suara atau  $f(t) = I(t)$ .

Tuliskan kembali deret Fourier dengan periode sebarang menjadi sebagai berikut:

$$I(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{a,n} \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{b,n} \sin(\omega_n t) \quad (34)$$

dengan

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (35)$$

merupakan frekuensi harmonik ke- $n$ , sedangkan  $I_0$  adalah intensitas dasar yang tidak bergantung dengan waktu, dan  $I_{a,n}$  serta  $I_{b,n}$  merupakan intensitas yang terkait dengan harmonik ke- $n$ .

Berdasarkan penulisan ini, maka hasil yang diperoleh pada contoh 7.1 tersebut dapat ditafsirkan bahwa frekuensi harmonik ke- $n$  diberikan oleh:

$$\omega_n = n \quad (36)$$

karena  $T = 2\pi$ . Sedangkan untuk intensitas dasarnya adalah:

$$I_0 = \frac{5}{8} \quad (37)$$

Sedangkan intensitas yang terkait dengan harmonik dasar ke- $n$  berbentuk kosinus dan sinus berturut-turut diberikan oleh:

$$I_{a,n} = \frac{3}{2n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)] \quad (36c)$$

$$I_{b,n} = \frac{1}{2n\pi} [3\sin(n\pi/2) + \sin(n\pi)] \quad (36d)$$

## BAB 8

### PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

#### 1. Pendahuluan

Hampir sebagian besar gejala yang dibahas dalam Fisika memiliki kaitan dengan permasalahan laju perubahan dari suatu besaran fisis tertentu. Contoh paling sederhana yang telah lama kita jumpai adalah laju perubahan kecepatan suatu partikel terhadap waktu akibat gaya yang bekerja padanya sebagaimana diatur oleh Hukum Newton ke dua. Secara matematik, gambaran dinamika perubahan tersebut dituang dalam bentuk persamaan diferensial.

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang didalamnya mengandung turunan. Jika turunan yang terlibat hanya melibatkan satu buah variabel maka persamaan tersebut dinamakan Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan jika turunan yang terlibat adalah turunan parsial dari dua atau lebih variabel maka persamaan tersebut dinamakan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Salah satu contoh sederhana bagi PDB adalah:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y \quad (1)$$

yang tidak lain adalah PDB orde dua (karena orde terbesar turunannya adalah dua) bagi pegas dengan konstanta  $k$  yang diturunkan dari Hukum Newton ke dua.

Jika kita dihadapkan pada suatu gejala fisis yang dinamikanya diberikan oleh suatu persamaan diferensial, seperti pada kasus dinamika pegas, maka salah satu langkah yang harus kita lakukan untuk memperoleh gambaran menyeluruh tentang karakteristik gejala tersebut adalah dengan melakukan integrasi terhadap persamaan terkait atau dengan kata lain kita mencari solusi (pemecahan) atas persamaan tersebut. Kembali pada persamaan (1) di atas, dapat ditunjukkan bahwa solusi dari PDB tersebut diberikan oleh:

$$y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2)$$

dengan  $\omega = \sqrt{k/m}$  merupakan kecepatan sudut, sedangkan  $A$  dan  $B$  merupakan konstanta sebarang yang nilainya dapat ditentukan dari kondisi awal dinamika pegas tersebut.

Pada bab ini kita akan mengkhususkan diri pada pencarian solusi bagi sistem PDB, dengan menitik beratkan pada beberapa sistem PDB menggunakan metode-metode khusus.

## 2. PDB Linier Orde Satu

Sebuah PDB dikatakan berorde satu jika didalamnya orde terbesar dari turunan yang terlibat adalah satu atau  $d^n y/dx^n$  dengan  $n = 1$ . Misalkan  $y = y_1$  adalah solusi dari PDB yang dimaksud, demikian pula misalnya terdapat solusi lain  $y = y_2$  yang memenuhi, maka jika superposisi:  $y = y_1 + y_2$  juga merupakan solusi dari PDB tersebut dikatakan bahwa PDB tersebut adalah PDB linier. Dengan kata lain, sebuah PDB dikatakan linier jika berlaku prinsip superposisi, jika tidak maka dikatakan PDB tersebut adalah PDB tak-linier

Misalkan kita memiliki suatu sistem PDB linier orde satu berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

dimana fungsi  $f(x, y)$  dapat dituliskan dalam bentuk perkalian dua fungsi  $g(x)$  dan  $h(y)$  atau:

$$f(x, y) = g(x)h(y) \quad (4)$$

maka PDB pada persamaan (3) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\frac{dy}{h(y)} = \frac{dx}{g(x)} \quad (5)$$

Untuk memperoleh solusi dari persamaan (5) di atas dapat dilakukan dengan mengintegrasikan secara tak-tentu kedua ruas terhadap masing-masing variabel:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int \frac{dx}{g(x)} + C \quad (6)$$

dengan  $C$  adalah konstanta integrasi yang dapat ditentukan dari kondisi awal. Kemudian, setelah kita melakukan integrasi, dapat ditentukan solusinya dalam bentuk  $y = y(x)$ .

*Contoh 8.1.* Tentukan solusi PDB:  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$ . Kita ubah bentuk tersebut menjadi:  $\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$ , kemudian kita integrasikan kedua ruas terhadap masing-masing

variabel diperoleh:  $\int \frac{dy}{y} = \ln y$  dan  $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ . Dari sini diperoleh  $\ln y = x^3 + C$ , sehingga dengan demikian solusi bagi persamaan tersebut adalah  $y = A \exp(x^3)$  dengan  $A = \exp(C)$  juga merupakan konstanta integrasi.

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh untuk memecahkan sistem PDB orde satu pada persamaan (3), kita akan mempergunakannya untuk memecahkan PDB bentuk lain yaitu:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad (7)$$

dengan  $P = P(x)$  dan  $Q = Q(x)$ . Untuk mencari solusinya, kita tinjau bentuk berikut:

$$Y = y \exp(I) \quad (8)$$

dengan  $y$  adalah solusi PDB (7) dan

$$I = \int P dx \quad (9)$$

Turunkan persamaan (8) terhadap  $x$  diperoleh:

$$\frac{dY}{dx} = \left( \frac{dy}{dx} + Py \right) \exp(I) \quad (10)$$

Berdasarkan persamaan (7), persamaan (10) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\frac{dY}{dx} = Q \exp(I) \quad (11)$$

Terapkan kembali cara yang diberikan pada persamaan (6) diperoleh solusi bagi persamaan (11):

$$Y = \int Q \exp(I) dx + C \quad (12)$$

Dari persamaan (8) didapatkan solusi untuk PDB (7):

$$y \exp(I) = \int Q \exp(I) dx + C \quad (13)$$

atau

$$y = \exp(-I) \int Q \exp(I) dx + C \exp(-I) \quad (14)$$

*Contoh 8.2.* Tentukan solusi PDB berikut:  $x \frac{dy}{dx} + 2y = 1$ . Pertama kita ubah bentuk PDB tersebut menjadi:  $\frac{dy}{dx} + 2y/x = 1/x$ , bandingkan dengan persamaan (7) dapat kita identifikasi bahwa:  $P(x) = 2/x$  dan  $Q(x) = 1/x$ . Diperoleh untuk ungkapan



untuk  $I = \int (2/x) dx = \ln x^2$  sehingga  $\exp(I) = x^2$  dan  $\exp(-I) = 1/x^2$ . Berdasarkan persamaan (14):  $\int Q \exp(I) dx = \int (1/x)x^2 dx = x^2/2$ . Dengan demikian diperoleh solusi untuk PDB adalah:  $y = (x^2/2)/x^2 + C/x^2 = 1/2 + C/x^2$ .

*Contoh 8.2.* Kelajuan gerak sebuah parasut ditentukan oleh PDB berikut:  $dv/dt - bv = \exp(\beta t)$ , dengan  $b$  dan  $\beta$  adalah konstanta. Tentukan solusi bagi  $v$  jika pada saat  $t = 0$  parasut memiliki kelajuan awal  $v_0$ . Terlihat bahwa  $P = -b$  sehingga  $I = \int P dt = -bt$  dan  $\exp(\pm I) = \exp(\mp bt)$ , sedangkan  $Q = \exp(\beta t)$ . Dari persamaan (14):  $v(t) = \exp(bt) \int \exp(\beta t) \exp(-bt) dt + C \exp(-bt)$  atau  $v(t) = \exp(\beta t)/(\beta - b) + C \exp(bt)$ . Karena pada  $t = 0$  diketahui bahwa  $v = v_0$ , maka  $v_0 = 1/(\beta - b) + C$ , sehingga  $C = v_0 - 1/(\beta - b)$ . Dengan demikian solusi  $v$  secara lengkap dapat dituliskan sebagai berikut:  $v(t) = \frac{\exp(\beta t) + [v_0(\beta - b) - 1] \exp(bt)}{\beta - b}$ .

### 3. PDB Tak-Linier Orde Satu dan Linierisasinya

Tinjau PDB orde satu berikut:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^m \quad (15)$$

dengan  $m > 1$ . PDB ini merupakan persamaan tidak linier karena superposisi dari dua solusi persamaan tersebut bukan merupakan solusi dari persamaan yang sama. Hal ini diakibatkan kehadiran suku  $y^m$  pada ruas kanan persamaan (15). Secara khusus, persamaan diferensial (15) dikenal sebagai persamaan Bernoulli dan merupakan contoh bagi sebuah PDB orde satu yang tidak linier.

Untuk memecahkannya, dapat diperkenalkan transformasi variabel berikut:

$$w = y^{1-m} \quad (16)$$

dengan turunannya diberikan oleh:

$$\frac{dw}{dx} = (1-m)y^{-m} \frac{dy}{dx} \quad (17)$$

Kemudian kalikan ruas kiri dan kanan persamaan (15) dengan  $(1-m)y^{-m}$  diperoleh:

$$\underbrace{(1-m)y^{-m} \frac{dy}{dx}}_{\frac{dw}{dz}} + (1-m)P(x) \underbrace{y^{1-m}}_w = (1-m)Q(x) \quad (18)$$

Sehingga dengan demikian kita dapatkan persamaan (15) dalam variabel yang baru menjadi:

$$\frac{dw}{dz} + P_m(x)w = Q_m(x) \quad (19)$$

Dengan  $P_m(x) = (1-m)P(x)$  dan  $Q_m(x) = (1-m)Q(x)$ . Dapat dengan mudah terlihat bahwa persamaan (19) memiliki kemiripan bentuk dengan PDB (7), sehingga dengan demikian  $w$  memiliki bentuk solusi seperti yang diberikan pada persamaan (14).

Proses yang ditunjukkan pada contoh di atas dinamakan proses linierisasi dari suatu persamaan diferensial yang tidak linier. Proses ini pada dasarnya tidak berlaku umum bagi semua PDB tak-linier. Tetapi, dalam beberapa kasus kita dapat mencari transformasi yang mengakibatkan sebuah PDB yang tidak linier disuatu ruang solusi menjadi bentuk linier di ruang solusi yang lain. Seperti pada persamaan Bernoulli yang tidak linier dalam ruang solusi  $y$ , tetapi linier dalam ruang solusi  $w$ .

#### 4. PDB Linier Orde Dua

Karena hukum fundamental gerak, yakni Hukum Newton, mengandung turunan ke dua terhadap waktu, maka PDB orde dua merupakan salah satu jenis persamaan diferensial yang paling sering muncul dalam Fisika. Dalam pasal ini, kita akan membahas dan membatasi diri pada kasus PDB orde dua yang linier dengan koefisien konstan. Secara umum PDB linier orde dua tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$c_2 \frac{d^2y}{dx^2} + c_1 \frac{dy}{dx} + c_0y = f(x) \quad (18)$$

Dengan  $c_0, c_1$  dan  $c_2$  merupakan konstanta. Selanjutnya kita akan membagi pembahasan bentuk homogen (*homogeneous*) persamaan (18) yaitu dengan  $f(x) = 0$  maupun untuk kasus tak-homogen (*inhomogeneous*) dengan  $f(x) \neq 0$ .

##### 4.1. Kasus Homogen

Untuk memudahkan kita dalam membahas cara untuk memperoleh solusi bagi PDB orde dua, kita akan memanfaatkan penulisan operator diferensial sebagai berikut:

$$D \equiv \frac{d}{dx} \quad (19)$$

Dengan penulisan ini, persamaan (18) untuk kasus homogen dapat dituliskan dalam bentuk:

$$c_2 D^2 y + c_1 D y + c_0 y = 0 \quad (20)$$

Atau dapat pula dituliskan sebagai berikut:

$$(c_2 D^2 + c_1 D + c_0) y = 0 \quad (21)$$

Operator di dalam kurung pada ruas kiri persamaan (21) memiliki bentuk yang mirip dengan bentuk fungsi kuadrat yang akar-akarnya dapat dicari melalui persamaan berikut:

$$c_{\pm} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2 c_0}}{2c_2} \quad (22)$$

Berdasarkan akar-akar tersebut, kembali kita dapat tuliskan bentuk persamaan (21) menjadi:

$$(D - c_+)(D - c_-) y = 0 \quad (23)$$

Berdasarkan penulisan tersebut kini kita dapat mencari solusi dari persamaan tersebut secara sederhana dengan memecahkan secara bersamaan dua PDB linier orde satu berikut, misalkan:

$$(D - c_-) y = u(x) \quad (24)$$

sehingga

$$(D - c_+) u = 0 \quad (25)$$

Solusi persamaan (25) diberikan oleh:

$$u(x) = C_+ \exp(c_+ x) \quad (26)$$

Substitusikan solusi (26) ke dalam persamaan (24), kita dapatkan:

$$(D - c_-) y = C_+ \exp(c_+ x) \quad (27)$$

Dengan  $C_+$  adalah konstanta integrasi. Persamaan (27) mirip dengan PDB (7) dimana  $P = -c_-$  dan  $I = -c_- x$ , serta  $Q = C_+ \exp(c_+ x)$ . Dengan menggunakan persamaan (14) diperoleh solusi untuk persamaan (27) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
y &= \exp(c_-x) \int C_+ \exp(c_+x) \exp(-c_-x) dx + C_- \exp(c_-x) \\
&= \frac{C_+}{c_- - c_+} \exp(c_+x) + C_- \exp(c_-x)
\end{aligned} \tag{28}$$

dimana  $c_+ \neq c_-$ . Karena  $c_{\pm}$  dan  $C_{\pm}$  pada solusi (28) merupakan konstanta, maka secara umum solusi tersebut dapat dituliskan kembali sebagai:

$$y = C_+ \exp(c_+x) + C_- \exp(c_-x) \tag{29}$$

dimana konstanta  $C_+/(c_+ - c_-)$  dituliskan kembali sebagai  $C_+$ .

Misalkan akar-akar  $c_{\pm} = c_{\text{Re}} \pm ic_{\text{Im}}$  merupakan bilangan kompleks, maka solusi (29) tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = \exp(c_{\text{Re}}x) (C_+ \exp(ic_{\text{Im}}x) + C_- \exp(-ic_{\text{Im}}x)) \tag{30}$$

atau dalam bentuk sinus dan kosinus berdasarkan hubungan Euler:

$$y = \exp(c_{\text{Re}}x) (A \sin(c_{\text{Im}}x) + B \cos(c_{\text{Im}}x)) \tag{31}$$

dengan bilangan kompleks  $A$  dan  $B$  adalah konstanta yang baru.

Khusus untuk kasus dengan kondisi akar-akar yang sama,  $c_- = c_+ = c$ , persamaan (28) akan tereduksi menjadi:

$$\begin{aligned}
y &= \exp(cx) \int A \exp(cx) \exp(-cx) dx + B \exp(cx) \\
&= \exp(cx) \int A dx + B \exp(cx) \\
&= (Ax + B) \exp(cx)
\end{aligned} \tag{32}$$

Sebagai catatan, pada solusi bagi PDB orde dua di atas terdapat dua buah konstanta integrasi sebarang yang dapat ditentukan nilainya jika diketahui kondisi solusi  $y$  pada dua titik  $x$  yang berbeda.

*Contoh 8.3.* Tinjau PDB orde dua berikut:  $3d^2y/dx^2 - 2dy/dx + 1 = 0$ . Berdasarkan hubungan (22), akar-akar persamaan tersebut adalah  $c_{\pm} = (1 \pm i\sqrt{2})/3$ . Sehingga dengan demikian solusi dari PDB tersebut diberikan oleh persamaan (31), dengan  $c_{\text{re}} = 1/3$  dan  $c_{\text{im}} = \sqrt{2}/3$ , yaitu:  $y = \exp(x/3) (A \sin(x\sqrt{2}/3) + B \cos(x\sqrt{2}/3))$ .

*Contoh 8.4.* Tinjau kembali PDB orde dua berikut:  $d^2y/dx^2 - 6dy/dx + 9 = 0$  dimana pada  $x = 0$ ,  $y = y_0$  dan pada  $x = x_m$ ,  $y = y_m$ . PDB terkait memiliki akar-akar yang sama  $c = 3$ , sehingga dengan demikian solusinya diberikan oleh persamaan (32):

$y = (Ax + B)\exp(3x)$ . Berdasarkan kondisi pada  $x = 0$  diperoleh  $y_0 = B$  dan pada  $x = x_m$ ,  $y_m = (Ax_m + y_0)\exp(3x_m)$  dan diperoleh  $A = (y_m - y_0 \exp(3x_m))/x_m \exp(3x_m)$ .

#### 4.2. Kasus Tak-Homogen

Untuk kasus PDB linier orde dua yang tidak homogen dengan  $f(x) \neq 0$ , metode yang relatif sama dengan yang telah kita bahas untuk memperoleh solusi (29) dapat juga kita gunakan, tetapi tentu saja dengan tingkat kesulitan yang berbeda. Secara fisis, suku  $f(x)$  pada PDB (18) dapat dipandang sebagai suku sumber atau dapat pula ditafsirkan sebagai fungsi pemaksa, tergantung dari dinamika fisis terkait.

Kita tuliskan kembali persamaan (18) dalam notasi operator diferensial (19) sebagai berikut:

$$(D - c_+)(D - c_-)y = f(x) \quad (33)$$

dengan akar-akar karakteristik  $c_{\pm}$  diberikan oleh persamaan (22). Kita misalkan kembali bahwa PDB orde satu berikut berlaku:

$$(D - c_-)y = u(x) \quad (34)$$

sehingga

$$(D - c_+)u = f(x) \quad (35)$$

Berdasarkan solusi untuk PDB orde satu yang diberikan oleh persamaan (14) didapatkan solusi untuk PDB (35) dengan  $P = -c_+$  dan  $I = -c_+x$ , serta  $Q = f(x)$ :

$$u(x) = \exp(c_+x) \int f(x) \exp(-c_+x) dx + C_+ \exp(c_+x) \quad (36)$$

Setelah langkah ini kita lakukan dan diperoleh solusi bagi  $u$ , maka kita tinjau PDB orde satu (34) lalu kita terapkan cara yang persis sama dengan langkah untuk memperoleh  $u$ , sehingga diperoleh:

$$y(x) = \exp(c_-x) \int u(x) \exp(-c_-x) dx + C_- \exp(c_-x) \quad (37)$$

Jadi secara garis besar terdapat dua langkah yang harus kita tempuh untuk memperoleh solusi  $y$  yaitu dengan mencari terlebih dahulu fungsi  $u$  yang memenuhi PDB (34) baru kemudian dicari fungsi  $y$  terkait melalui persamaan (37).

Untuk menerapkan teknik pencarian solusi ini, kita akan tinjau beberapa contoh kasus dengan  $f(x)$  berbentuk fungsi eksponensial dan sinusoidal berikut:

(1).  $f(x) = A \exp(kx)$  dengan  $k \neq c_+ \neq c_-$

Berdasarkan persamaan (36) diperoleh fungsi  $u$  terkait diberikan oleh:

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp(c_+x) \int A \exp(kx) \exp(-c_+x) dx + C_+ \exp(c_+x) \\ &= \frac{A}{k - c_+} \exp(kx) + C_+ \exp(c_+x) \end{aligned} \quad (38)$$

Kemudian berdasarkan persamaan (37) didapatkan untuk solusi  $y$  - nya adalah:

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp(c_-x) \int \left( \frac{A}{k - c_+} \exp(kx) + C_+ \exp(c_+x) \right) \exp(-c_-x) dx + C_- \exp(c_-x) \\ &= \frac{A}{(k - c_+)(k - c_-)} \exp(kx) + \underbrace{\frac{C_+}{c_+ - c_-} \exp(c_+x) + C_- \exp(c_-x)}_{\text{solusi persamaan PDB homogen}} \end{aligned} \quad (39)$$

Terlihat bahwa dua suku terakhir baris ke dua persamaan (39) tidak lain adalah solusi PDB homogen yang telah kita bahas pada pasal 4.1, sehingga dengan demikian, konstanta-konstanta di dalam persamaan (39) dapat kembali dituliskan sebagai:

$$y(x) = \frac{A}{(k - c_+)(k - c_-)} \exp(kx) + C_+ \exp(c_+x) + C_- \exp(c_-x) \quad (40)$$

Pada solusi yang diberikan pada persamaan (40), terlihat bahwa parameter  $A$  dan  $k$  bukanlah konstanta integrasi seperti halnya  $C_{\pm}$ .

*Contoh 8.5.* Tentukan solusi PDB berikut:  $(D^2 + 4D - 5)y = 7 \exp(2x)$ . Faktorisasi PDB tersebut diperoleh:  $(D - 1)(D + 5)y = 7 \exp(2x)$ , dengan demikian dapat diidentifikasi  $c_+ = 1$ ,  $c_- = -5$ ,  $k = 2$  dan  $A = 7$ . Berdasarkan persamaan (40) diperoleh solusinya adalah:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{7}{(2 - 1)(2 + 5)} \exp(kx) + C_+ \exp(x) + C_- \exp(-5x) \\ &= \exp(kx) + C_+ \exp(x) + C_- \exp(-5x) \end{aligned}$$

(2).  $f(x) = A \exp(kx)$  dengan  $k = c_+ \neq c_-$

Pada kondisi ini, persamaan (38) akan tereduksi menjadi:

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp(kx) \int A \exp(kx) \exp(-kx) dx + C_+ \exp(kx) \\ &= (Ax + C_+) \exp(kx) \end{aligned} \quad (41)$$

sehingga diperoleh untuk solusi  $y$  berdasarkan persamaan (37):

$$y(x) = \exp(c_- x) \int ((Ax + C_+) \exp(kx)) \exp(-c_- x) dx + C_- \exp(c_- x) \quad (42)$$

Untuk memecahkan memperoleh bentuk eksplisit persamaan (42) kita tinjau satu persatu integral berikut (buktikan!):

$$\exp(c_- x) \int Ax \exp(kx) \exp(-c_- x) dx = \frac{A}{(k - c_-)} x \exp(kx) - \frac{A}{(k - c_-)^2} \exp(kx)$$

$$\exp(c_- x) \int C_+ \exp(kx) \exp(-c_- x) dx = \frac{C_+}{(k - c_-)} \exp(kx)$$

Sehingga dengan demikian bentuk persamaan (42) adalah:

$$y(x) = \frac{A}{(k - c_-)} x \exp(kx) + \underbrace{\left[ \frac{A + C_+(k - c_-)}{(k - c_-)^2} \right] \exp(kx) + C_- \exp(c_- x)}_{\text{solusi PDB homogen}} \quad (43)$$

Kembali terlihat bahwa dua suku terakhir baris ke dua persamaan (43) tidak lain adalah solusi PDB homogen terkait, sehingga dengan demikian, konstanta-konstanta di dalam persamaan tersebut dapat kembali dituliskan sebagai:

$$y(x) = \frac{A}{(k - c_-)} x \exp(kx) + C_+ \exp(kx) + C_- \exp(c_- x) \quad (44)$$

*Contoh 8.6.* Tentukan solusi PDB berikut:  $(D^2 - D - 2)y = \exp(x)$ . Faktorisasi PDB tersebut diperoleh:  $(D - 1)(D + 2)y = \exp(x)$ , dengan demikian dapat diidentifikasi  $c_+ = k = 1$ ,  $c_- = -2$  dan  $A = 1$ . Berdasarkan persamaan (44) diperoleh solusinya adalah:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{(1 + 2)} x \exp(x) + C_+ \exp(x) + C_- \exp(-2x) \\ &= \frac{1}{3} x \exp(x) + C_+ \exp(x) + C_- \exp(-2x) \end{aligned}$$

(3).  $f(x) = A \exp(kx)$  dengan  $k = c_+ = c_-$

Pada kondisi ini, persamaan (38) akan tereduksi menjadi:

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp(kx) \int A \exp(kx) \exp(-kx) dx + C_+ \exp(kx) \\ &= (Ax + C_+) \exp(kx) \end{aligned} \quad (45)$$

sehingga diperoleh untuk solusi  $y$  berdasarkan persamaan (37) untuk kondisi  $k = c_+ = c_-$ :

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp(kx) \int ((Ax + C_+) \exp(kx)) \exp(-kx) dx + C_- \exp(kx) \\ &= \exp(kx) \int (Ax + C_+) dx + C_- \exp(kx) \\ &= \left[ \frac{A}{2} x^2 + C_+ x + C_- \right] \exp(kx) \end{aligned} \quad (46)$$

Dua suku terakhir baris ke tiga persamaan (46) juga tidak lain adalah solusi PDB homogen terkait.

*Contoh 8.7.* Tentukan solusi PDB berikut:  $(D^2 - 2D + 1)y = 3 \exp(x)$ . Faktorisasi PDB tersebut diperoleh:  $(D - 1)(D - 1)y = 3 \exp(x)$ , dengan demikian dapat diidentifikasi  $c_+ = c_- = k = 1$  dan  $A = 3$ . Berdasarkan persamaan (46) diperoleh solusinya adalah:

$$y(x) = \left[ \frac{3}{2} x^2 + C_+ x + C_- \right] \exp(x)$$

(4).  $f(x) = A \exp(kx)$  dengan  $k \neq c_+ = c_-$

Pada kondisi ini, persamaan (38) akan tereduksi menjadi:

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp(c_+ x) \int A \exp(kx) \exp(-c_+ x) dx + C_+ \exp(c_+ x) \\ &= \frac{A}{k - c_+} \exp(kx) + C_+ \exp(c_+ x) \end{aligned} \quad (47)$$

sehingga diperoleh untuk solusi  $y$  berdasarkan persamaan (37) untuk kondisi  $k \neq c_+ = c_-$ :

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp(c_+ x) \int \left( \frac{A}{k - c_+} \exp(kx) + C_+ \exp(c_+ x) \right) \exp(-c_+ x) dx + C_- \exp(c_+ x) \\ &= \frac{A}{(k - c_+)^2} \exp(kx) + (C_+ x + C_-) \exp(c_+ x) \end{aligned} \quad (48)$$

Suku terakhir baris ke dua persamaan (48) adalah solusi PDB homogen terkait. Dari solusi yang telah kita peroleh untuk fungsi sumber berbentuk eksponensial atau sinusoidal terlihat didalamnya selalu mengandung solusi bagi PDB homogen dengan



$f(x)=0$ . Ambil contoh solusi yang diberikan pada persamaan (48), yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = y_h + y_p \quad (49)$$

dengan

$$y_h = (C_+x + C_-)\exp(kx) \quad (50)$$

yang tidak lain merupakan solusi PDB homogen terkait, sedangkan

$$y_p = \frac{A}{(k - c_+)^2} \exp(kx) \quad (51)$$

merupakan solusi khusus (*particular solution*) PDB tak-homogen tersebut yang bentuknya tergantung dari fungsi sumber  $f(x)$ . Solusi dengan bentuk yang diberikan pada persamaan (49) dinamakan sebagai solusi umum dari PDB yang terkait.

(5).  $f(x) = A \sin(kx)$  atau  $f(x) = A \cos(kx)$

Untuk menyelesaikan persoalan dengan fungsi sinus atau kosinus, kita dapat memanfaatkan hasil-hasil untuk kasus fungsi eksponen di atas. Berdasarkan hubungan Euler, fungsi-fungsi sinus dan kosinus tersebut dapat dinyatakan sebagai  $f(x) = A \cos(kx) = \text{Re}[A \exp(ikx)]$  dan  $f(x) = A \sin(kx) = \text{Im}[A \exp(ikx)]$ . Dipihak lain, PDB orde dua yang kita tinjau merupakan sistem persamaan linier yang mengikuti prinsip superposisi, sehingga solusi  $y = y_{\text{Re}} + iy_{\text{Im}}$  memenuhi:

$$(D - c_+)(D - c_-)y_{\text{Re}} = A \cos(kx) = \text{Re}[A \exp(ikx)] \quad (49a)$$

$$(D - c_+)(D - c_-)y_{\text{Im}} = A \sin(kx) = \text{Im}[A \exp(ikx)] \quad (49b)$$

Dengan demikian jelas, bahwa untuk memecahkan PDB dengan fungsi  $f(x)$  berbentuk fungsi sinus atau kosinus, maka yang kita perlukan adalah memecahkan persoalan dengan  $f(x) = A \exp(ikx)$  dengan solusi yang telah diberikan pada persamaan (40), (43) atau (46) sesuai dengan kondisi hubungan antara  $k$ ,  $c_+$  dan  $c_-$  yang diberikan dan dengan catatan bahwa  $k \rightarrow ik$ . Solusi khusus terkait dapat diperoleh dengan mengambil  $\text{Re}(y_p)$  untuk kasus  $f(x) = A \cos(kx)$  dan  $\text{Im}(y_p)$  untuk  $f(x) = A \sin(kx)$  sebagai solusi khusus terkait.

*Contoh 8.8.* Tentukan solusi PDB berikut:  $(D^2 - 2D + 1)y = 4 \sin(x)$ . Pertama, kita cari dulu solusi dari persamaan  $(D^2 - 2D + 1)y = 4 \exp(ix)$ . Faktorisasi persamaan tersebut adalah  $(D - 1)(D - 1)y = 4 \exp(ix)$ , sehingga  $c_+ = c_- = 1$ ,  $k = i$  dan  $A = 4$ . Berdasarkan solusi yang diberikan pada persamaan (48) yang bersesuaian dengan kondisi  $k \neq c_+ = c_-$  diperoleh:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{4}{(i-1)^2} \exp(ix) + (C_+ x + C_-) \exp(x) \\ &= \frac{4(i+1)^2}{(i+1)^2 (i-1)^2} \exp(ix) + (C_+ x + C_-) \exp(x) \\ &= \underbrace{2i \exp(ix)}_{y_p} + \underbrace{(C_+ x + C_-) \exp(x)}_{y_h} \end{aligned}$$

Dari sini dapat diperoleh solusi untuk PDB yang dimaksud adalah  $y = \text{Im}(y_p) + y_h$  berikut:

$$y(x) = 2 \cos(x) + (C_+ x + C_-) \exp(x)$$

Pembaca dapat dengan mudah meyakini diri bahwa solusi tersebut memenuhi PDB yang dimaksud.

Misalkan fungsi sumber yang terdapat pada sebuah PDB orde dua merupakan superposisi dari  $N$  – buah fungsi atau:

$$f(x) = \sum_N f_n(x) \quad (52)$$

maka berdasarkan prinsip superposisi, solusi dari PDB tersebut diberikan oleh:

$$y = y_h + \sum_N y_{n,p} \quad (53)$$

dengan  $y_{n,p}$  adalah solusi khusus terkait dengan  $f_n(x)$ .

*Contoh 8.9.* Tentukan solusi PDB berikut:  $(D^2 - 2D + 1)y = 3 \exp(x) + 4 \sin(x)$ . Berdasarkan hasil yang diperoleh pada contoh 8.7 dan 8.8 dengan jelas terlihat bahwa solusi PDB tersebut diberikan oleh:

$$y(x) = \frac{3}{2} x^2 \exp(kx) + 2 \cos(x) + (C_+ x + C_-) \exp(x)$$

## 5. PDB Linier Terkoppel

Pada sistem yang didalamnya melibatkan beberapa buah sub-sistem yang saling berinteraksi, seperti misalnya dua massa yang terikat dengan pegas, secara umum dinamikanya diberikan oleh satu set persamaan diferensial yang satu sama lain saling terkait atau terkoppel.

Berikut adalah contoh sederhana PDB linier orde satu yang terkoppel:

$$\frac{dx}{dt} = x + y \quad (54a)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y \quad (54b)$$

Terlihat pada PDB terkoppel (54), bahwa fungsi  $x(t)$  dan  $y(t)$  muncul secara simultan di kedua persamaan tersebut.

Kita tinjau sistem persamaan (54) dengan memanfaatkan operator  $D$  pada persamaan (19), kemudian kita nyatakan persamaan (54) dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Berdasarkan aturan Cramer yang telah kita bahas pada bab 3, kita dapatkan bahwa kedua persamaan tersebut dapat di buat menjadi tidak terkoppel sebagai berikut (buktikan!):

$$\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D+1 \end{vmatrix} \quad (56)$$

dimana

$$\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix} x = (D^2 - 1)x - x \quad \text{dan} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D+1 \end{vmatrix} = 0 \quad (57)$$

sehingga diperoleh PDB orde dua untuk fungsi  $x$  saja yang diberikan oleh:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0 \quad (58)$$

Sedangkan untuk fungsi  $y$  :

$$\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D-1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (59)$$

dimana

$$\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix} y = (D^2 - 1)y - y \quad \text{dan} \quad \begin{vmatrix} D-1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (60)$$

Sehingga diperoleh PDB orde dua untuk fungsi  $y$  saja:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2y = 0 \quad (61)$$

Akar-akar karakteristik persamaan (58) dan (61) adalah  $c_{\pm} = \pm\sqrt{2}$  dan berdasarkan solusi yang diberikan oleh persamaan (29) untuk kasus PDB orde dua yang homogen diperoleh:

$$x = A \exp(t\sqrt{2}) + B \exp(-t\sqrt{2}) \quad (62a)$$

$$y = C \exp(t\sqrt{2}) + D \exp(-t\sqrt{2}) \quad (62b)$$

Terlihat pada solusi (62) terdapat empat buah parameter yang merupakan konstanta integrasi yaitu  $A, B, C$  dan  $D$ . Sementara itu, karena PDB yang kita tinjau berorde satu, maka seharusnya hanya terdapat dua konstanta integrasi saja yang merupakan parameter bebas, sedangkan dua lainnya tidak bebas. Untuk menentukan hubungan kedua parameter tidak bebas tersebut dengan dua konstanta lainnya, dapat kita lakukan dengan memasukkan kembali solusi (62) ke dalam PDB terkopel (54) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$A\sqrt{2} \exp(t\sqrt{2}) - B\sqrt{2} \exp(-t\sqrt{2}) = (A + C) \exp(t\sqrt{2}) + (B + D) \exp(-t\sqrt{2}) \quad (63a)$$

$$C\sqrt{2} \exp(t\sqrt{2}) - D\sqrt{2} \exp(-t\sqrt{2}) = (A - C) \exp(t\sqrt{2}) + (B - D) \exp(-t\sqrt{2}) \quad (63b)$$

Dengan menyamakan parameter pada suku  $\exp(t\sqrt{2})$  diperoleh persamaan berikut:

$$A\sqrt{2} = A + C \quad (64a)$$

$$C\sqrt{2} = A - C \quad (64b)$$

Dari sini kita peroleh:

$$C = (\sqrt{2} - 1)A \quad (65)$$

Sedangkan untuk parameter pada suku  $\exp(-t\sqrt{2})$  diperoleh persamaan berikut:

$$-B\sqrt{2} = B + D \quad (66a)$$

$$-D\sqrt{2} = B - D \quad (66b)$$

sehingga

$$D = -(\sqrt{2} + 1)B \quad (67)$$

Dengan demikian kita peroleh sebagai hasil akhir solusi bagi PDB terkopel (54):

$$x = A \exp(t\sqrt{2}) + B \exp(-t\sqrt{2}) \quad (68a)$$

$$y = (\sqrt{2} - 1)A \exp(t\sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 1)B \exp(-t\sqrt{2}) \quad (68b)$$

Perlu ditekankan sekali lagi bahwa sistem PDB terkopel, baik yang linier maupun yang tidak linier, muncul dalam problem fisis yang terkait dengan interaksi dalam suatu sistem.

## 6. Contoh Penerapan dalam Fisika

Sebagai contoh kasus, kita akan membahas persamaan dinamika satu dimensi yang dijumpai dalam sistem partikel bermassa yang terhubung dengan pegas dan bergerak di dalam cairan viskos serta dipaksa oleh gaya dari luar yang bersifat sinusoidal. Berdasarkan Hukum Newton ke dua dinamika sistem tersebut ditentukan oleh:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{luar} \quad (69)$$

dimana  $y$  adalah simpangan pegas dari titik setimbang,  $m$  massa partikel yang terhubung dengan pegas dan

$$\sum F_{luar} = -ky - bv + F_0 \cos(\omega_0 t) \quad (70)$$

dengan  $k$  adalah konstanta pegas,  $v = dy/dt$  adalah kelajuan partikel,  $b$  konstanta viskositas dan  $F_0$  amplitudo gaya pemaksa berfrekuensi  $\omega_0$ . Sehingga PDB linier orde dua yang terkait dengan sistem tersebut diberikan oleh:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = F_0 \cos(\omega_0 t) \quad (71)$$

dimana  $\omega = \sqrt{k/m}$  merupakan frekuensi pegas jika tidak ada gaya hambat dari cairan dan gaya pemaksa.

Akar-akar karakteristik persamaan (71) dengan memanfaatkan hubungan (22) adalah:

$$c_{\pm} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (72)$$

Untuk mencari solusi PDB (71) kita lakukan langkah seperti yang diterapkan pada contoh 8.8, yakni dengan memecahkan terlebih dahulu PDB:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = F_0 \exp(i\omega_0 t) \quad (73)$$

Berdasarkan solusi (40) untuk kasus  $i\omega_0 \neq c_+ \neq c_-$ , diperoleh:

$$y(t) = \frac{F_0 \exp(i\omega_0 t)}{\left( (i\omega_0 + b/2m) - \sqrt{(b/2m)^2 - \omega^2} \right) \left( (i\omega_0 + b/2m) + \sqrt{(b/2m)^2 - \omega^2} \right)} + C_+ \exp(c_+ t) + C_- \exp(c_- t) \quad (74)$$

dengan  $c_{\pm}$  diberikan oleh persamaan (72). Solusi yang diberikan pada persamaan (74) bagi PDB (73) di atas dapat disederhanakan menjadi (buktikan):

$$y(t) = \frac{F_0 \exp(i\omega_0 t)}{(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega_0 b/m)} + C_+ \exp(c_+ t) + C_- \exp(c_- t) \quad (75)$$

Kembali ke PDB (71), dengan cara yang serupa pada contoh 8.8, kita dapatkan solusinya adalah:

$$y(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{F_0 \exp(i\omega_0 t)}{(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega_0 b/m)} \right] + C_+ \exp(c_+ t) + C_- \exp(c_- t) \quad (76)$$

atau (buktikan!)

$$y(t) = \frac{F_0 \left[ (\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega_0 t) + \omega_0 b \sin(\omega_0 t) / m \right]}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_0 b/m)^2} + C_+ \exp(c_+ t) + C_- \exp(c_- t) \quad (77)$$

Dari ungkapan akar-akar karakteristik (72) terlihat bahwa  $c_{\pm}$  dapat berharga riil ataupun kompleks bergantung pada nilai  $(b/2m)^2 - \omega^2$ . Jika  $(b/2m)^2 - \omega^2 > 0$ , maka terlihat bahwa  $c_{\pm} = -|c_{\pm}| < 0$  dan kondisi ini mengakibatkan solusi homogen pada persamaan (77) dapat dituliskan menjadi:

$$y_h(x) = C_+ \exp(-|c_+|t) + C_- \exp(-|c_-|t) \quad (78)$$

Dari sisi jelas terlihat bahwa untuk  $t \rightarrow \infty$ ,  $y_h \rightarrow 0$  dan sistem dikatakan berada dalam keadaan sangat teredam (*overdamped*).

Sebagai konsekuensi dari kondisi ini:

$$y(t \rightarrow \infty) = \frac{F_0 \left[ (\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega_0 t) + \omega_0 b \sin(\omega_0 t) / m \right]}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_0 b / m)^2} = y_p(t) \quad (79)$$

Dari sini jelas bahwa solusi khusus yang diberikan oleh persamaan (79) tidak lain merupakan solusi keadaan mantap dari sistem pegas dengan gaya pemaksa, artinya untuk waktu yang cukup lama, solusi yang tetap bertahan adalah solusi tersebut sedangkan solusi homogen dengan  $F_0 = 0$  lenyap dan tidak lagi memberikan sumbangan bagi pola gerak vibrasi partikel tersebut.

Jika  $(b/2m)^2 - \omega^2 = 0$ , dimana sistem berada dalam kondisi teredam kritis (*critically damped*), maka  $c_{\pm} = c = -b/2m$  dan solusi homogen pada persamaan (77) adalah:

$$y_h(x) = (C_+ t + C_-) \exp(-|c|t) \quad (80)$$

Sedangkan jika sistem berada pada kondisi kurang teredam (*underdamped*) dimana  $(b/2m)^2 - \omega^2 < 0$ , maka sistem memiliki akar-akar karakteristik yang kompleks  $c_{\pm} = c_{\text{Re}} \pm ic_{\text{Im}}$  dengan  $c_{\text{Re}} = -b/2m$  dan  $c_{\text{Im}} = \sqrt{\omega^2 - (b/2m)^2}$ . Solusi untuk keadaan ini diberikan oleh:

$$y_h(x) = \exp(-|c_{\text{Re}}|t) [A \sin(c_{\text{Im}}t) + B \cos(c_{\text{Im}}t)] \quad (81)$$

Sama halnya untuk kondisi sangat teredam, maka untuk dua kasus terakhir solusi homogenya juga tidak lagi memiliki peranan pada  $t \rightarrow \infty$ .

## BAB 9

### KALKULUS VARIASI

#### 1. Pendahuluan

Dalam Fisika, peranan kalkulus sebagai salah satu alat untuk menggambarkan dinamika dari suatu sistem memiliki peranan yang sangat penting. Penerapannya dalam menggambarkan hukum gerak Newton misalnya, melibatkan posisi  $\bar{r}$  yang secara eksplisit dinyatakan sebagai fungsi dari waktu  $t$  dan memenuhi persamaan diferensial yang sudah kita kenal. Jelas, pada dasarnya persamaan gerak Newton digunakan untuk menentukan pola lintasan dari suatu benda akibat kendala yang ditimbulkan oleh gaya yang bekerja padanya.

Hukum Newton pada dasarnya merupakan hukum empirik yang diperoleh berdasarkan pengalaman sehari-hari. Secara matematika, persamaan gerak Newton bagi sistem konservatif dapat diturunkan dari suatu prinsip yang lebih umum yang dikenal sebagai prinsip Hamilton, atau dikenal juga sebagai prinsip variasi, melalui pendefinisian "aksi" yang merupakan sebuah "fungsional" berbentuk integral:

$$S = \int L(r, \dot{r}, t) dt \quad (1)$$

dengan  $L$  merupakan suatu fungsi dari kecepatan  $\dot{r} = dr/dt = v$  dan posisi  $r$ , yang notabene adalah fungsi dari waktu. Dalam prinsip ini, persamaan dinamika Newton terkait dapat diturunkan dengan mencari ekstremal dari fungsional aksi, yakni dengan melakukan "variasi" terhadapnya sedemikian rupa sehingga:

$$\delta S = 0 \quad (2)$$

dimana  $\delta$  menyatakan simbol variasi. Prinsip ini ternyata memiliki peran yang lebih fundamental, dapat ditunjukkan bahwa seluruh problem fisis tunduk pada prinsip tersebut, sehingga kadang dinamakan sebagai *god given rule*.

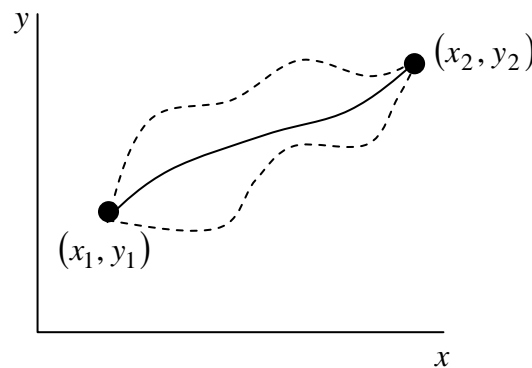
Jika kalkulus yang selama digunakan dalam persamaan gerak Newton mengacu pada dinamika fungsi, maka dalam perumusan Hamilton, dinamika yang ditinjau adalah dinamika fungsional dan kalkulus yang terkait dinamakan sebagai kalkulus variasi. Perlu dicatat bahwa penerapan kalkulus variasi dalam Fisika tidak hanya terbatas pada menurunkan persamaan gerak Newton.



## 2. Prinsip Variasi dan Persamaan Euler

### 2.1. Prinsip Variasi

Dalam formulasi kalkulus biasa, problem mencari ekstremal (titik-titik ekstrim) dari suatu fungsi  $f(x, y)$ , secara sederhana dilakukan dengan memecahkan kondisi  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$  yang mengimplikasikan  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  dan  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , dimana titik  $(x, y)$  yang memenuhi kondisi tersebut merupakan titik-titik kritis yang dapat berupa titik maksimum, minimum atau titik sadel. Seperti yang pernah dibahas pada Bab 4 buku ini, untuk memeriksa jenis manakah titik tersebut maka perlu dilakukan uji selanjutnya yang melibatkan turunan parsial orde berikutnya serta nilai Hessian fungsi tersebut. Titik-titik kritis tersebut secara khusus juga disebut sebagai titik stasioner. Jelas, pertanyaan mengenai apakah suatu dinamika dari suatu sistem memiliki maksimum-minimum merupakan hal yang cukup penting dijawab dan kadang-kadang memiliki derajat kesulitan yang tinggi.



Gambar 1

Berbeda dengan kalkulus biasa, sebagaimana telah disinggung pada bagian pendahuluan, dalam kalkulus variasi kita berhubungan dengan keadaan stationer dari suatu fungsional. Misalkan:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), \dot{y}(x)] dx \quad (3)$$

merupakan fungsional yang dimaksud dengan  $\dot{y} = dy/dx$ . Permasalahan yang akan ditinjau adalah sebagai berikut: misalkan fungsi  $y$  berharga tetap di titik-titik ujung  $x_1$  dan  $x_2$ , sedangkan di antara keduanya, fungsi tersebut dapat memiliki bermacam lintasan yang mungkin dan kita ingin mencari lintasan mana yang sebagaimana diilustrasikan dalam Gambar 1 yang mengakibatkan fungsional  $I$  memiliki harga yang paling kecil (stasioner). Misalkan kembali, kurva dengan garis padat pada Gambar 1 merupakan lintasan  $y$  yang dimaksud, sedangkan lintasan yang lainnya, secara prinsip, dapat dinyatakan melalui transformasi  $y$  ke dalam bentuk berikut:

$$y(x) \rightarrow y(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (4a)$$

$$\dot{y}(x) \rightarrow \dot{y}(x) + \varepsilon \dot{\eta}(x) \quad (4b)$$

dengan fungsi  $\eta$  menggambarkan penyimpangan lintasan dari  $x$  dan memiliki kondisi  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , sedangkan  $\varepsilon$  merupakan sebuah parameter variasi. Dengan demikian, berdasarkan bentuk tersebut, fungsional yang kita tinjau sekarang adalah:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), \dot{y}(x); \varepsilon] dx \quad (5)$$

dengan kondisi yang harus dipenuhi ketika  $\varepsilon = 0$

$$\delta I = \left( \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} d\varepsilon = 0 \quad (6)$$

Dalam ungkapan persamaan (6) telah digunakan simbol  $\delta$  yang menyatakan variasi  $I$ . Penggunaan simbol ini memiliki kemiripan dengan simbol diferensial " $d$ ", tetapi memiliki makna yang berbeda, dimana  $\delta$  mengacu pada variasi lintasan yang dicirikan oleh parameter  $\varepsilon$  sehingga secara umum variasi fungsi sebarang  $W$  diberikan oleh

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \quad (7).$$

## 2.2. Persamaan Euler

Selanjutnya, dengan melakukan manipulasi kalkulus biasa, variasi persamaan (5) diberikan oleh:

$$\delta I = \left[ \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \varepsilon} \right) dx \right] d\varepsilon \quad (8)$$

Dengan catatan  $\partial x/\partial \varepsilon = 0$ . Karena:

$$\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \eta, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \varepsilon} = \dot{\eta} \quad (9)$$

maka diperoleh:

$$\delta I = \left[ \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\eta} \right) dx \right] d\varepsilon \quad (10)$$

Kemudian tinjau integral kedua dalam kurung siku bagian kanan persamaan (10), dengan memanfaatkan integral perbagian diperoleh:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\eta} dx = \eta \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \eta dx \quad (11)$$

Meningat di titik-titik ujung  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , maka integral (10) tereduksi menjadi:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\eta} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \eta dx \quad (12)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh untuk persamaan (10) bentuk berikut:

$$\delta I = \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \right] \eta dx \right\} d\varepsilon \quad (13)$$

Karena secara umum  $\eta \neq 0$  dan sebarang, maka kondisi yang harus dipenuhi agar variasi  $I$  berharga nol adalah:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (14)$$

Persamaan (14) dinamakan persamaan Euler yang menyatakan bahwa keadaan stasioner fungsional  $I$  hanya dapat dicapai jika fungsi  $F$  memenuhi persamaan tersebut.

Penurunan persamaan (14) dengan menggunakan simbol variasi  $\delta$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dx \end{aligned} \quad (15)$$

Serupa dengan persamaan integral (11), bagian kedua dari ruas kanan persamaan (15) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{d}{dx} (\delta y) dx \\
 &= \underbrace{\delta y \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dx \\
 &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dx
 \end{aligned} \tag{16}$$

dimana telah digunakan syarat variasi  $\delta y = 0$  di  $x = x_1$  dan  $x_2$ . Dengan demikian diperoleh kembali bentuk:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \right] \delta y dx = 0 \tag{17}$$

dan jelas bahwa suku di dalam kurung siku integral di atas adalah persamaan Euler (14).

Perlu menjadi catatan penting bahwa semua problem dalam kalkulus variasi, pada prinsipnya dapat dipecahkan dengan mencari fungsional  $I$ , kemudian mencari keadaan stationernya dengan mensubstitusikan fungsi  $F$  terkait pada persamaan Euler untuk selanjutnya dicari lintasan yang dimaksud.

*Contoh 2.1.* Misalkan sebuah partikel bergerak pada suatu bidang datar  $(x, y)$ . Untuk menentukan jarak terdekat yang dapat ditempuh antara dua titik  $s_1 = (x_1, y_1)$  dan  $s_2 = (x_2, y_2)$  pada bidang tersebut definisikan terlebih dahulu panjang infinitesimal  $ds$  dari suatu kurva sebarang tersebut:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Selanjutnya bentuk fungsional bagi

persoalan terkait yakni  $I = \int_{s_1}^{s_2} ds$ , yang dapat direduksi menjadi bentuk  $I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$ .

Jelas dari sini kita memiliki fungsi  $F(x, y, \dot{y}) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ . Masukkan ke dalam persamaan Euler terkait:

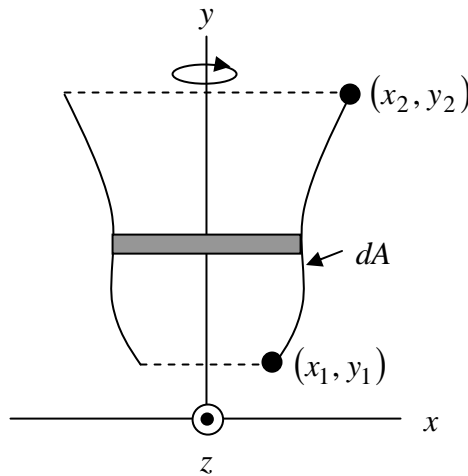
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (\text{i})$$

Jelas bahwa pada persamaan (i)  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$  dan  $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$ , sehingga dengan demikian

diperoleh  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$  yang mengimplikasikan bahwa:

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c \quad (\text{ii})$$

dengan  $c$  adalah sebuah konstan. Kemudian ubah persamaan (ii) menjadi  $\dot{y} = c\sqrt{1 + \dot{y}^2}$ , kuadratkan kedua ruas sehingga diperoleh  $\dot{y} = \sqrt{\frac{c}{1-c}} = a$  dengan  $a$  juga merupakan konstanta. Sehingga dengan demikian, solusi bagi  $y$  adalah  $y = ax + b$ , yang tidak lain merupakan sebuah garis lurus. Hal ini sesuai dengan kenyataan bahwa jarak antara dua titik pada bidang datar merupakan garis lurus.



Gambar 2

*Contoh 2.2.* Misalkan kita ingin membentuk suatu permukaan dengan luas minimum melalui cara memutarakan sebuah kurva yang melewati titik-titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  terhadap sumbu  $y$  sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 2. Untuk

menentukannya, kita tinjau elemen luas  $dA$  yang besarnya ditentukan oleh hubungan

$$dA = 2\pi x ds \text{ dengan } ds = \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \text{ sehingga total areanya adalah: } 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx,$$

sehingga fungsi  $F$  terkait diberikan oleh  $F(x, y, \dot{y}) = x\sqrt{1 + \dot{y}^2}$ . Jelas terlihat bahwa

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ dan } \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}. \text{ Substitusikan hasil tersebut ke persamaan Euler (14)}$$

$$\text{diperoleh } \frac{d}{dx} \left( \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0 \text{ atau}$$

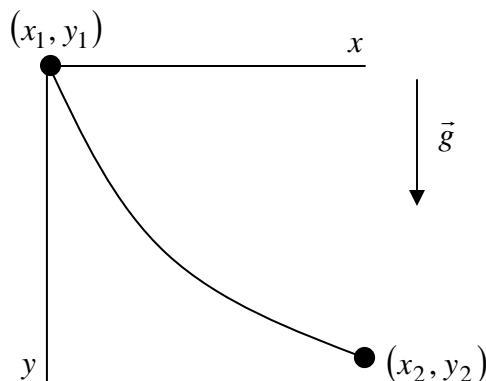
$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c \tag{i}$$

dimana  $c$  adalah sebuah konstanta. Bentuk persamaan (i) dapat diubah menjadi  $\dot{y}^2(x^2 - c^2) = c^2$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{\sqrt{x^2 - c^2}} \tag{ii}$$

Integrasikan persamaan (ii) diperoleh  $y = c \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = c \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) + b$  atau

$x = a \cosh\left(\frac{y-b}{c}\right)$  yang dikenal sebagai persamaan bagi kurva *catenary* (rantai).



Gambar 3

*Contoh 2.3. Persoalan Brachistochrone.* Tinjau sebuah kelereng yang meluncur tanpa rotasi akibat pengaruh gaya gravitasi melalui sebuah lintasan di bidang  $(x, y)$  sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 3. Kita akan mencari kurva  $y(x)$  yang merupakan lintasan yang ditempuh dengan waktu yang paling minimum. Misalkan kelajuan sesaat kelereng tersebut diberikan oleh  $v$  sehingga jarak infinitesimal yang ditempuhnya diberikan oleh  $ds = v dt$  atau  $dt = ds/v$ , dimana  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Jika kelereng tersebut memiliki kondisi awal  $v = 0$  pada  $y = 0$ , maka berdasarkan prinsip kekekalan energi mekanik diketahui bahwa:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0 \quad (\text{i})$$

sehingga  $v = \sqrt{2gy}$ . Selanjutnya karena yang ingin kita cari adalah lintasan dengan waktu minimum, maka bentuk fungsional terkait yang akan kita cari minimumnya adalah  $I = \int dt = \int ds/v$ . Dengan mengambil  $y$  sebagai variabel bebas, maka fungsional yang terkaitnya diberikan oleh:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2}{y}} dy \quad (\text{ii})$$

Jelas bahwa  $F = \sqrt{(1 + \dot{x}^2)/y}$ . Substitusikan fungsi  $F$  ke dalam persamaan Euler (14),

dimana  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  dan  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{y}\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$ , sehingga kembali didapatkan:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{y}\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c \quad (\text{iii})$$

dengan  $c$  sebuah konstanta. Dengan mengatur kembali persamaan (iii) didapatkan

$$dx = dy \sqrt{\frac{c^2 y}{1 - c^2 y}} = \frac{y dy}{\sqrt{\frac{y}{c^2} - y^2}} \quad (\text{iv})$$

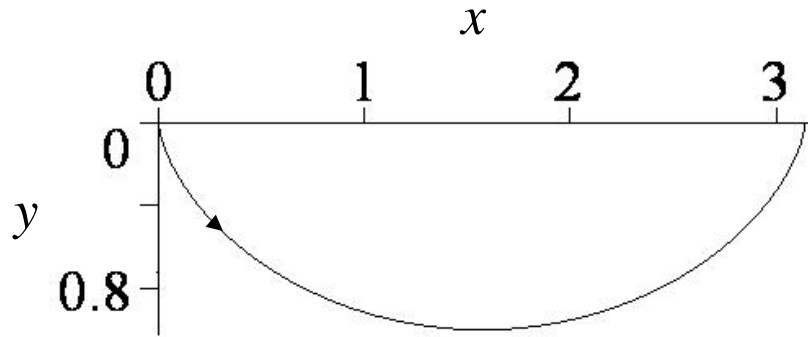
Integrasikan kedua ruas diperoleh (berdasarkan tabel integral):

$$x = -\sqrt{\frac{y}{c^2} - y^2} + \frac{1}{2c^2} \arccos(1 - 2c^2 y) + b \quad (\text{v})$$

Untuk mengetahui bentuk solusi (v) secara parametrik dengan sudut  $\theta$  sebagai parameternya, dapat dilakukan dengan memperkenalkan hubungan  $1 - 2c^2y = \cos \theta$ , sehingga mengakibatkan (buktikan!)  $\sqrt{\frac{y}{c^2} - y^2} = \frac{1}{2c^2} \sin \theta$ . Berdasarkan bentuk tersebut maka  $x$  dan  $y$  secara parametrik dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x = \frac{1}{2c^2}(\theta - \sin \theta), \quad y = \frac{1}{2c^2}(1 - \cos \theta) \quad (\text{vi})$$

Hasil plot dari persamaan parametrik (vi) diberikan pada Gambar 4 dengan selang  $\theta = 0$  sampai  $2\pi$ . Bentuk kurva pada Gambar 4 tersebut dikenal sebagai kurva *cycloid*.



Gambar 4

Menarik untuk ditekankan disini bahwa cara lain yang dapat ditempuh untuk menyelesaikan persoalan Brachistochrone ini adalah dengan mendefinisikan  $x$  sebagai

variabel bebasnya, sehingga fungsionalnya menjadi  $I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} dy$ . Tetapi

pemilihan ini akan mengakibatkan permasalahan menjadi relatif sangat kompleks,

mengingat  $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{1 + \dot{y}^2}{y\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$ ,  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\dot{y}^2(1 + \dot{y}^2) - 2y\ddot{y}}{y(1 + \dot{y}^2)\sqrt{y}\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$ , maka diperoleh

persamaan dinamika bagi variabel lintasan  $y$  sebagai berikut:

$$2y\ddot{y} - \sqrt{y}(1 + \dot{y}^2) = 0 \quad (\text{vii})$$



yang jelas sangat kompleks . Dari sini dapat disimpulkan bahwa pemilihan variabel bebas merupakan suatu tahapan yang sangat penting dalam upaya menyederhanakan persoalan.

Perlu menjadi catatan penting disini, bahwa dari dua contoh 2.1 dan 2.2, terlihat adanya kondisi:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (18)$$

yang mengindikasikan bahwa

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \text{konstan} \quad (19)$$

secara khusus kuantitas  $\partial F/\partial \dot{y}$  dinamakan sebagai integral pertama (*first integral*) dari persamaan Euler terkait dan dalam Fisika dinamakan sebagai konstanta gerak. Sedangkan variabel lintasan  $y$  secara khusus dinamakan sebagai variabel siklik (*cyclic variable*).

### 3. Persamaan Euler dengan Beberapa Variabel Lintasan

Dalam penurunan persamaan Euler (14), bentuk fungsional yang kita tinjau memiliki variabel lintasan  $y$  dan turunannya  $\dot{y}$ , yang masing-masing merupakan fungsi dari variabel bebas  $x$ . Dalam hal ini, kita tidak perlu membatasi jumlah variabel lintasan hanya satu buah saja. Tinjau misalnya kasus dimana terdapat dua buah variabel lintasan yang membentuk sebuah bidang, sebut saja  $y(x)$  dan  $z(x)$ , dengan turunan masing-masing diberikan oleh  $\dot{y}(x)$  dan  $\dot{z}(x)$ . Kemudian definisikan sebuah fungsional terkait sebagai berikut:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y, \dot{y}, z, \dot{z}] dx \quad (18)$$

Misalkan untuk transformasi bagi lintasan  $y$  diberikan oleh:

$$y(x) \rightarrow y(x) + \varepsilon_y \eta_y(x) \quad (19a)$$

$$\dot{y}(x) \rightarrow \dot{y}(x) + \varepsilon_y \dot{\eta}_y(x) \quad (19b)$$

Di lain pihak, untuk lintasan  $z$  :

$$z(x) \rightarrow z(x) + \varepsilon_z \eta_z(x) \quad (20a)$$

$$\dot{z}(x) \rightarrow \dot{z}(x) + \varepsilon_z \dot{\eta}_z(x) \quad (20b)$$

dengan  $\varepsilon_{y\{z\}}$  merupakan parameter variasi untuk lintasan  $y\{z\}$  sedangkan  $\eta_{y\{z\}}$  adalah fungsi terkaitnya. Selanjutnya kita lakukan kembali variasi terhadap fungsional tersebut sehingga memenuhi kondisi:

$$\delta I = \left( \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_y} \right) \Big|_{\varepsilon_y=0} d\varepsilon_y + \left( \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_z} \right) \Big|_{\varepsilon_z=0} d\varepsilon_z \quad (21)$$

atau dengan kata lain:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta_y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\eta}_y \right) d\varepsilon_y dx + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \eta_z + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \dot{\eta}_z \right) d\varepsilon_z dx \right] \quad (23)$$

dimana  $\partial y / \partial \varepsilon_y = \eta_y$ ,  $\partial \dot{y} / \partial \varepsilon_y = \dot{\eta}_y$  dan  $\partial z / \partial \varepsilon_z = \eta_z$ ,  $\partial \dot{z} / \partial \varepsilon_z = \dot{\eta}_z$ . Kembali dengan menggunakan integral perbagian diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{\Omega}} \dot{\eta}_\Omega \right) dx &= \eta_\Omega \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot{\Omega}} \Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{\Omega}} \right) \eta_\Omega dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{\Omega}} \right) \eta_\Omega dx \end{aligned} \quad (24)$$

dengan  $\Omega = y$  atau  $z$ . Dengan demikian diperoleh:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \right] \eta_y d\varepsilon_y dx + \left[ \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \right) \right] \eta_z d\varepsilon_z dx \right\} = 0 \quad (25)$$

dan jelas bahwa:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (26a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \right) = 0 \quad (26b)$$

Misalkan kembali kita memiliki sistem yang memiliki sejumlah  $N$  buah lintasan  $y_i(x)$  dimana  $i = 1, 2, \dots, N$  dengan fungsional terkait diberikan oleh:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y_i, \dot{y}_i] dx \quad (27)$$

maka melalui cara yang persis sama dengan kasus untuk dua lintasan, persamaan Euler terkait untuk masing indeks  $i$  diberikan oleh:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_2} \right) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_N} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_N} \right) &= 0\end{aligned}\tag{28}$$

Misalkan dari sejumlah  $N$  persamaan tersebut terdapat  $M < N$  buah persamaan dimana

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0, \text{ maka sistem tersebut memiliki } M \text{ buah integral pertama.}$$

#### 4. Contoh Penerapan dalam Fisika

Telah ketahui secara baik bahwa hukum kedua Newton merupakan suatu rumusan empirik yang diperoleh berdasarkan pengalaman sehari-hari. Pertanyaan yang kemudian timbul adalah apakah ada prinsip yang lebih fundamental, yang mampu menjelaskan asal dari hukum tersebut. Hingga saat ini, secara fisis memang belum diketahui prinsip apakah yang mendasarinya. Tetapi dipihak lain, secara matematis, cara mengenai bagaimana bentuk persamaan diferensial hukum kedua tersebut diperoleh telah diketahui dengan memanfaatkan kaidah kalkulus variasi dan dikenal sebagai prinsip Hamilton, sebagaimana telah disinggung sepintas pada bagian pendahuluan.

Misalkan untuk sebuah partikel yang berada pada pengaruh gaya memiliki energi kinetik  $T \equiv T(q, \dot{q}, t)$ , sedangkan gaya yang berpengaruh tersebut dapat diwakili oleh fungsi  $U \equiv U(q, \dot{q}, t)$ , maka dapat dibentuk sebuah fungsi yang dinamakan fungsi Lagrange atau Lagrangian  $L$  yang didefinisikan sebagai

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t)\tag{29}$$

dimana  $q \equiv q(t)$  dan  $\dot{q} = \dot{q}(t)$  merupakan koordinat umum. Selanjutnya dapat pula dibangun sebuah fungsional yang terkait dengan fungsi Lagrange:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt\tag{30}$$

yang dinamakan sebagai fungsional Aksi. Berdasarkan fungsional Aksi tersebut, prinsip Hamilton mengatakan bahwa lintasan yang ditempuh oleh partikel tersebut dari kedudukannya pada  $t_1$  sampai dengan  $t_2$  memiliki fungsional Aksi yang stasioner atau dengan kata lain

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (31)$$

yang mengimplikasikan bahwa Lagrangian memenuhi persamaan:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (32)$$

yang selanjutnya disebut sebagai persamaan Euler-Lagrange. Dengan mensubstitusikan persamaan (29) diperoleh:

$$\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} \right) \quad (33)$$

Untuk melihat hubungan antara persamaan (33) dengan hukum kedua Newton, kita tinjau kasus khusus dimana  $T = T(\dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$  sedangkan  $U = V = V(q)$ . Jelas bahwa untuk kasus tersebut persamaan (33) tereduksi menjadi:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \quad (34)$$

dengan menuliskan:

$$F(q) = -\frac{\partial V}{\partial q} \quad (35)$$

persamaan (34) segera terlihat sebagai persamaan diferensial untuk hukum kedua Newton:

$$m\ddot{q} = F(q) \quad (36)$$

Dalam kasus khusus ini, fungsi  $F(q)$  mewakili gaya konservatif, sedangkan  $V(q)$  dinamakan sebagai fungsi potensial.

Kembali pada persamaan umum (33), untuk sistem yang melibatkan gaya yang bersifat konservatif, hukum kedua Newton dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = Q(q, \dot{q}, t) \quad (37)$$

dengan  $Q = \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} \right)$  merupakan gaya umum non-konservatif yang terkait.

Misalkan jumlah koordinat umum yang terdefinisi dalam Lagrangian terkait lebih dari satu sehingga  $L \equiv L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$ , maka serupa dengan persamaan (28) berlaku untuk masing-masing koordinat umum  $q_j, \dot{q}_j$ :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad (38)$$

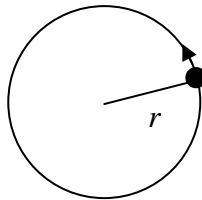
Sebagai contoh pertama, tinjau sistem sederhana yang terdiri atas sebuah partikel bermassa  $m$  dengan energi kinetik  $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ , yang berada pada pengaruh gaya pegas dengan fungsi potensial diberikan oleh  $V = \frac{1}{2} kx^2$ . Jelas bahwa Lagrangian terkait diberikan oleh:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (39)$$

Substitusikan persamaan (39) ke dalam persamaan Euler-Lagrange (32) dengan koordinat umum  $q = x$  dan  $\dot{q} = \dot{x}$ , sehingga diperoleh  $-kx - m\ddot{x} = 0$  atau

$$m\ddot{x} = -kx \quad (40)$$

yang tidak lain merupakan persamaan gerak Newton bagi sistem partikel dengan pegas.



Gambar 5

Untuk contoh kedua, tinjau partikel bermassa  $m$  yang bergerak dalam lintasan melingkar, sebagaimana diilustrasikan oleh Gambar 5, dan berada pada pengaruh potensial  $V(r, \theta)$ . Energi kinetik yang terkait dengan partikel tersebut diberikan oleh

$T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$  dengan  $r$  adalah jari-jari lintasan dan  $\theta$  adalah sudut dalam radian.

Lagrangian sistem tersebut adalah:

$$L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r, \theta) \quad (41)$$

yang memiliki dua koordinat umum  $q_1 = r$  dan  $q_2 = \theta$ . Dari persamaan Euler-Lagrange diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (42a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} - mr^2\ddot{\theta} = 0 \quad (42b)$$

Sehingga diperoleh:

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{\partial V}{\partial r} \quad (43a)$$

$$mr^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (43b)$$

Dengan mendefinisikan  $-\partial V/\partial r = F_r$  dan  $-\partial V/\partial \theta = F_\theta$ . Jelas terlihat disini bahwa percepatan dalam arah  $r$  diberikan oleh:

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 \quad (44)$$

yang tidak lain merupakan percepatan sentripetal. Sedangkan untuk percepatan dalam arah  $\theta$  diberikan oleh

$$a_\theta = r^2\ddot{\theta} \quad (45)$$

Sebagai catatan akhir, perlu ditekankan bahwa prinsip Hamilton memiliki peranana yang cukup penting dalam Mekanika, Gelombang maupun dalam Teori Medan dan dibanayk cabang Fisika lainnya.

## BAB 10

### TRANSFORMASI KOORDINAT

#### 1. Pendahuluan

Dalam memecahkan persoalan-persoalan Fisika atau untuk menerangkan makna fisis dari suatu fenomena, pemilihan sistem koordinat merupakan salah satu tahapan yang paling menentukan. Hal ini disebabkan karena ketepatan dalam memilih suatu sistem koordinat dapat memberikan kemudahan bagi kita, yakni dengan membuat permasalahan menjadi terlihat lebih sederhana. Sebagai contoh sederhana adalah mengenai pembahasan gerak melingkar. Jika kita memilih menggunakan sistem koordinat siku atau kartesis, maka problem yang kelihatannya sederhana tersebut berubah menjadi relatif rumit dan sebaliknya, persoalan tersebut akan menjadi jauh lebih sederhana jika kita bekerja dengan menggunakan sistem koordinat kutub atau polar. Tetapi hal ini berbeda jika kita meninjau kasus partikel yang jatuh bebas dalam bidang dua dimensi misalnya. Penggunaan koordinat polar justru akan memperumit masalah dan akan jauh lebih mudah jika diselesaikan dengan menggunakan sistem koordinat kartesis.

Di lain pihak, untuk memodelkan suatu persoalan secara umum, misalnya dengan memformulasikan persamaan diferensial yang terkait, kadang kita masih memanfaatkan sistem koordinat yang lazim digunakan, seperti sistem koordinat kartesis. Tetapi, sebagaimana dicontohkan di atas, ketika kita dihadapkan dengan suatu persoalan dengan simetri tertentu maka kita dituntut untuk mengubah sistem kartesis ke sistem lainnya. Operasi untuk mengubah sistem koordinat tersebut dinamakan sebagai "transformasi koordinat".

#### 2. Transformasi Linier

Misalkan kita memiliki sebuah vektor dalam sistem koordinat dua dimensi komponen sebut saja  $(x, y)$ . Sebuah transformasi dikatakan linier jika kita melakukan perubahan komponen

$$(x, y) \Rightarrow (x', y') \quad (1)$$

dengan  $(x', y')$  adalah komponen dalam sistem koordinat baru yang dapat diperoleh sedemikian rupa melalui superposisi linier dari koordinat yang lama sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y \\y' &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}\tag{2}$$

atau dalam bentuk matriks dituliskan sebagai:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\tag{3}$$

dengan inversnya diberikan oleh:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\tag{4}$$

dimana

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\tag{5}$$

Misalkan vektor yang terkait dengan komponen-komponen tersebut adalah:

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y\tag{6}$$

dimana  $\hat{e}_x$  dan  $\hat{e}_y$  merupakan vektor-vektor basis dalam arah  $x$  dan  $y$ . Selanjutnya untuk mengetahui bagaimana basis-basis tersebut bertransformasi, tuliskan kembali vektor (5) dalam bentuk matriks berikut:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\tag{7}$$

Substitusikan persamaan (4) ke dalam persamaan (6) sehingga:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}'_x & \hat{e}'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{r}'\tag{8}$$

Jelas terlihat disini bahwa:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_x \\ \hat{e}'_y \end{pmatrix} = (M^{-1})^T \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix}\tag{9}$$

*Contoh 2.1.* Misalkan berdasarkan sistem koordinat kartesis, sebuah vektor  $\vec{r} = 2\hat{e}_x + \hat{e}_y$ . Jika vektor tersebut ditransformasikan ke dalam suatu sistem koordinat baru melalui matriks:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{i}$$

dengan



$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ii})$$

Berdasarkan persamaan (3), komponen vektor dalam koordinat baru diberikan oleh:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{iii})$$

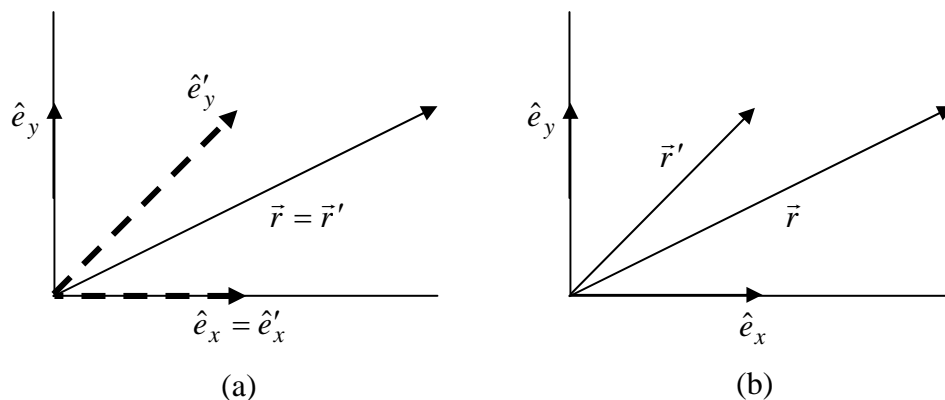
sehingga vektor tersebut dalam koordinat yang baru diberikan oleh  $\vec{r}' = \hat{e}'_x + \hat{e}'_y$ .

Berdasarkan persamaan (9), diperoleh vektor basis baru yang dinyatakan dalam basis lama diberikan oleh:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_x \\ \hat{e}'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} \quad (\text{iv})$$

atau  $\hat{e}'_x = \hat{e}_x$  dan  $\hat{e}'_y = \hat{e}_x + \hat{e}_y$ . Ilustrasi kedua sistem koordinat tersebut diberikan dalam Gambar 1a. Perhatikan bahwa sistem koordinat yang baru mengalami deformasi dan tidak ortogonal. Perlu dicatat, bahwa terhadap koordinat yang lama, basis baru tidak harus memiliki panjang satu.

Apa yang telah diuraikan di atas merupakan salah satu cara pandang terhadap transformasi linier yang dimaksud, dimana dalam hal ini yang bertransformasi adalah vektor-vektor basis. Cara pandang lain adalah dengan melihat bahwa transformasi tersebut berlangsung pada sistem koordinat yang sama sehingga hanya komponennya yang bertransformasi, sedangkan vektor-vektor basisnya tetap. Kembali ke contoh 2.1., berdasarkan cara pandang ini vektor  $\vec{r}'$  diberikan oleh  $\vec{r}' = \hat{e}_x + \hat{e}_y$ , yang jelas terlihat mengalami deformasi bentuk dan perubahan arah sehingga  $\vec{r} \neq \vec{r}'$ , sebagaimana diberikan dalam Gambar 1b.



Gambar 1

### 3. Transformasi Ortogonal

Telah diperlihatkan bahwa secara umum transformasi (3) dan (9) tidak menjamin bahwa sistem koordinat yang baru merupakan sistem ortogonal. Untuk menghasilkan koordinat baru juga bersifat ortogonal, maka transformasi linier yang dimaksud harus bersifat rotasional dan secara khusus matriks  $M$  terkait dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

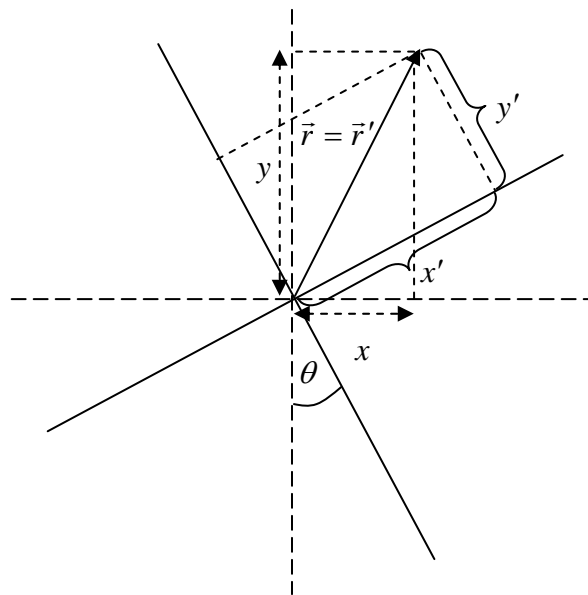
$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

Untuk memperoleh matriks tersebut tinjau rotasi yang diberikan dalam Gambar 2. Jelas terlihat dari gambar tersebut bahwa:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \quad (11)$$

Berdasarkan persamaan (4) dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (12)$$



Gambar 2

Dengan melakukan proses inversi, dapat dengan mudah dibuktikan bahwa matriks  $M$  diberikan oleh persamaan (10) dan jelas bahwa

$$M^{-1} = M^T \quad (13)$$

atau dengan kata lain  $M$  merupakan sebuah matriks ortogonal, sehingga dengan demikian jelas bahwa transformasi tersebut dapat dinamakan sebagai transformasi linier ortogonal atau disingkat transformasi ortogonal.

Selanjutnya, tinjau panjang vektor  $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$  dalam sistem koordinat lama yang diberikan oleh:

$$|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 \quad (14)$$

dan panjang vektor  $\vec{r}' = x'\hat{e}'_x + y'\hat{e}'_y$ :

$$|\vec{r}'|^2 = x'^2 + y'^2 \quad (15)$$

Dengan melakukan substitusi  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$  dan  $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$  ke dalam persamaan (15):

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 \\ &= x^2 \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} + \underbrace{2xy \cos \theta \sin \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta}_{=0} + y^2 \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (16)$$

diperoleh bahwa panjang vektor tersebut tidak berubah, sedangkan berdasarkan transformasi (9) untuk basis-basis dalam koordinat yang baru diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \hat{e}'_x &= \hat{e}_x \cos \theta + \hat{e}_y \sin \theta \\ \hat{e}'_y &= -\hat{e}_x \sin \theta + \hat{e}_y \cos \theta \end{aligned} \quad (17)$$

Berbeda dengan contoh 2.1. untuk kasus transformasi linier non-ortogonal, dalam kasus ini kembali dapat dibuktikan pula dengan mudah bahwa panjang  $|\hat{e}'_x| = |\hat{e}'_y| = 1$ .

Misalkan kita melakukan dua atau lebih transformasi ortogonal dengan sudut  $\theta$  dan  $\psi$  berturut-turut dengan masing-masing matriks transformasi diberikan oleh  $M_\theta$  dan  $M_\psi$ , maka transformasi totalnya diberikan oleh:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (18a)$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_\psi \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (18b)$$

sehingga:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_\psi M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (19)$$

Perumusan mengenai transformasi ortogonal dalam bidang dua dimensi dapat diperluas ke ruang tiga dimensi. Misalkan kita melakukan rotasi dengan sumbu  $z$  sebagai sumbu putar sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (20)$$

dengan

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Misalkan selanjutnya dilakukan rotasi dengan sumbu  $y'$  sebagai sumbu putar diberikan oleh:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = M_\psi \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (22)$$

dimana

$$M_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (23)$$

dan terakhir dilakukan rotasi dengan  $x''$  sebagai sumbu putar berikut:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = M_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (24)$$

dengan

$$M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (25)$$

Berdasarkan transformasi tersebut maka secara umum rotasi tiga dimensi terkait dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_{\theta, \psi, \phi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (26)$$

dengan  $M_{\theta, \psi, \phi} = M_{\theta} M_{\psi} M_{\phi}$  diberikan oleh (buktikan!):

$$M_{\theta, \psi, \phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \psi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta + \cos \phi \sin \psi \cos \theta \\ -\sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta - \sin \phi \sin \psi \cos \theta \\ -\sin \psi & -\cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (27)$$

yang juga memenuhi kondisi ortogonalitas  $M_{\theta, \psi, \phi}^{-1} = M_{\theta, \psi, \phi}^T$ . Sedangkan panjang vektor juga invarian:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (28)$$

#### 4. Nilai dan Vektor Eigen

Tinjau kembali tafsiran transformasi linier yang terkait dengan kondisi dimana vektor mengalami deformasi bentuk dan perubahan arah dalam sistem koordinat yang sama. Bayangkan bahwa dalam ruang vektor tersebut terdapat sejumlah vektor yang tidak mengalami perubahan arah akibat transformasi tersebut dan hanya mengalami perubahan panjang saja.

Misalkan transformasi linier yang dimaksud diberikan oleh:

$$\vec{R} = M\vec{r} \quad (29)$$

Disini, guna mempermudah pemahaman, maka untuk transformasi terkait notasi  $\vec{R}$  digunakan sebagai ganti  $\vec{r}'$ . Agar vektor  $\vec{R}$  hanya mengalami perubahan panjang dan tidak berubah arahnya, maka kondisi yang harus dipenuhi adalah:

$$\vec{R} = \lambda \vec{r} \quad (30)$$

Dimana vektor  $\vec{r}$  dengan ciri tersebut dinamakan sebagai "vektor eigen", dan parameter  $\lambda$  dinamakan sebagai "harga eigen". Dengan menuliskan persamaan (30) dalam bentuk:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (31)$$

dan berdasarkan persamaan (30), diperoleh:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (32)$$

yang dapat dituliskan kembali dalam bentuk:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (33)$$

atau

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (34)$$

Berdasarkan aturan Cramer yang telah dibahas pada Bab 3 buku Fisika Matematika I, untuk sistem persamaan linier (34) solusinya diberikan oleh:

$$x = \frac{\det(U_x)}{\det(A)} = \frac{0}{\det(A)} \quad (35a)$$

$$y = \frac{\det(U_y)}{\det(A)} = \frac{0}{\det(A)} \quad (35b)$$

dimana

$$U_x = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad (36a)$$

$$U_y = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (36b)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \quad (36c)$$

Jelas terlihat bahwa untuk solusi trivial ( $x = 0, y = 0$ ) terkait dengan  $\det(A) \neq 0$ , sedangkan solusi non-trivial ( $x \neq 0, y \neq 0$ ) hanya dapat diperoleh jika

$$\det(A) = 0 \quad (37)$$

yang dinamakan sebagai persamaan karakteristik. Berdasarkan persamaan (37), nilai eigen  $\lambda$  yang dimaksud diberikan oleh solusi dari persamaan kuadrat berikut:

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(M) + \det(M) = 0 \quad (38)$$

dengan  $\text{Tr}(M) = a_{11} + a_{22}$  merupakan trace matriks  $M$  pada persamaan (5), sedangkan  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  merupakan determinannya. Dengan demikian, harga-harga untuk  $\lambda$  adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( \text{Tr}(M) + \sqrt{[\text{Tr}(M)]^2 - 4 \det(M)} \right) \quad (39a)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \text{Tr}(M) - \sqrt{[\text{Tr}(M)]^2 - 4 \det(M)} \right) \quad (39b)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan harga-harga eigen tersebut ke dalam persamaan linier (32) dan memecahkannya kembali diperoleh vektor eigen yang dimaksud.

*Contoh 2.2.* Tinjau transformasi linier dengan  $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ . Berdasarkan persamaan (35) diperoleh matriks tersebut memiliki harga eigen  $\lambda_1 = 6$  dan  $\lambda_2 = 1$ . Dari sini diperoleh sistem persamaan linier untuk  $\lambda_1 = 6$  yaitu  $6x = 5x - 2y$  dan  $6y = -2x + 2y$ , yang jelas tereduksi menjadi satu persamaan saja yaitu:

$$x + 2y = 0 \quad (i)$$

Sedangkan untuk harga eigen  $\lambda_2 = 1$ , persamaan tereduksinya adalah

$$2x - y = 0 \quad (ii)$$

Terlihat bahwa baik persamaan (i) maupun (ii) sama-sama membentuk persamaan garis lurus, dimana semua vektor yang terdefinisi didalamnya merupakan vektor-vektor eigen yang dimaksud. Artinya, untuk kasus dengan  $\lambda = \lambda_1 = 6$ , jika terdapat vektor sepanjang garis lurus  $2y = -x$ , maka hasil transformasi vektor tersebut oleh matriks  $M$  akan tetap searah, tetapi panjangnya berkontraksi menjadi  $6 \times$  panjang vektor tersebut. Tinjau vektor satuan dengan komponen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (iii)$$

maka transformasinya adalah  $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Sedangkan untuk  $\lambda = \lambda_1 = 1$ , semua vektor yang terdefinisi pada garis lurus  $y = 2x$  selain tetap searah, juga tidak mengalami kontraksi dan untuk melihatnya tinjau vektor satuan dengan komponen

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{iv})$$

yang transformasinya adalah vektor satuan dengan komponen yang sama.

## 5. Diagonalisasi Matriks

Kembali kita tuliskan sistem persamaan yang terkait dengan masing-masing harga eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2y_1 &= 6x_1 \\ -2x_1 + 2y_1 &= 6y_1 \end{aligned} \quad (40a)$$

$$\begin{aligned} 5x_2 - 2y_2 &= x_2 \\ -2x_2 + 2y_2 &= y_2 \end{aligned} \quad (40b)$$

dengan indeks bawah 1 dan 2 menyatakan komponen vektor eigen yang terkait dengan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  berturut-turut. Bentuk persamaan (40) dapat kembali dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Kembali dengan memakai vektor (iii) dan (iv) pada contoh 2.2., kita dapatkan bahwa:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Segera terlihat bahwa persamaan (42) dapat dimanipulasi sehingga menjadi:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Secara umum bentuk persamaan (43) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$D^{-1}MD = \Lambda \quad (44)$$

dimana  $\Lambda$  merupakan sebuah matriks diagonal.

Proses yang dibahas di atas merupakan proses diagonalisasi sebuah matriks dengan matriks  $D$  merupakan matriks pendagonal yang kolom-kolomnya berisi komponen vektor-vektor eigen matriks  $M$ , sedangkan  $\Lambda$  merupakan matriks diagonal



terkait dimana entri diagonalnya adalah harga-harga eigen terkait. Jelas bahwa syarat agar dapat dilakukan diagonalisasi adalah  $\det(D) \neq 0$  atau  $D$  merupakan matriks non-singular. Secara khusus transformasi (44) dinamakan sebagai transformasi similaritas.

Untuk memahami arti geometri dari proses diagonalisasi ini, misalkan matriks  $D$  yang kolom-kolomnya berisikan vektor-vektor eigen satuan dapat dipandang sebagai sebuah matriks rotasi dengan, yang merotasikan dengan sudut  $\theta$  sistem koordinat baru ke lama sebagai berikut:

$$\vec{r} = D\vec{r}' \quad (45)$$

dengan  $D = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , dan juga merotasikan vektor yang terdeformasi melalui:

$$\vec{R} = D\vec{R}' \quad (46)$$

Mengingat matriks  $M$  dalam sistem koordinat lama berperan dalam mendefinisikan vektor dalam sistem koordinat yang sama melalui hubungan  $\vec{R} = M\vec{r}$  [cf. Persamaan (29)], maka diperoleh:

$$\vec{R}' = D^{-1}M\vec{r}' = \Lambda\vec{r}' \quad (47)$$

Hubungan  $\vec{R}' = \Lambda\vec{r}'$  pada persamaan (47) menunjukkan bahwa dalam sistem koordinat baru, deformasi hanya bersifat mengubah panjang dari masing-masing komponen tanpa mengubah orientasinya dan ini selaras dengan konsep mengenai vektor eigen. Hal penting yang perlu dipahami adalah, bahwa dengan membentuk matriks pendagonal  $D$ , kita dapat memperoleh suatu sistem koordinat baru dimana vektor tidak mengalami perubahan orientasi.

## 6. Koordinat Kurvilinier

Pada Bab 5 buku Fisika Matematika I, telah diperkenalkan sistem koordinat bola dan silinder. Telah ditunjukkan pula bahwa elemen garis, permukaan dan volume pada dasarnya berturut-turut tidak berbentuk garis lurus, permukaan datar dan kotak persegi panjang. Untuk sistem koordinat silinder  $(r, \theta, z)$  dengan panjang elemen infinitesimal dalam arah  $r$ ,  $\theta$  dan  $z$  diberikan oleh  $dr$ ,  $r d\theta$  dan  $dz$ . Dipihak lain, transformasi antara  $(x, y, z)$  dengan  $(r, \theta, z)$  diberikan oleh:

$$x = r \cos \theta \quad (47a)$$

$$y = r \sin \theta \quad (47b)$$

$$z = z \quad (47c)$$

sehingga elemen garis untuk masing-masing arah diberikan oleh:

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad (48a)$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad (48b)$$

$$dz = dz \quad (48c)$$

Kini tinjau panjang vektor elemen garis  $ds$  berikut untuk koordinat kartesis:

$$d\vec{s}_{kar} = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z \quad (49)$$

dan

$$d\vec{s}_{sil} = dr\hat{e}_r + r d\theta\hat{e}_\theta + dz\hat{e}_z \quad (50)$$

untuk koordinat silinder dimana  $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_\theta$  dan  $\hat{e}_z$  adalah vektor satuan yang ortogonal satu sama lainnya. Sementara itu, berdasarkan persamaan (48), panjang elemen untuk masing-masing sistem adalah:

$$\begin{aligned} ds_{kar}^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} dr^2 + \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} r^2 d\theta^2 \\ &\quad - \underbrace{2 \cos \theta \sin \theta d\theta^2 + 2 \cos \theta \sin \theta d\theta^2}_{=0} + dz^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = ds_{sil}^2 \end{aligned} \quad (51)$$

Terlihat bahwa ungkapan bagi panjang elemen  $ds$  untuk koordinat kartesis dengan silinder memiliki kesamaan bentuk. Dapat dibuktikan bahwa elemen permukaan dan volumenya juga memiliki kesamaan bentuk.

Berdasarkan ciri (i) elemen garis, permukaan dan volume yang secara umum membentuk kurva, maka sistem-sistem koordinat dengan ciri tersebut dinamakan sebagai "sistem koordinat kurvilinier". Khusus jika terdapat pula ciri-ciri tambahan (ii) panjang elemen garis, luas permukaan dan volume memiliki kesamaan dengan koordinat kartesis dan (iii) vektor-vektor satuannya saling ortogonal, maka dinamakan sebagai "sistem koordinat kurvilinier ortogonal". Perlu dicatat bahwa koordinat kartesis pun termasuk dalam kategori koordinat kurvilinier ortogonal.

Dalam ungkapan vektor elemen garis  $d\vec{s}$ , secara umum untuk sebuah sistem koordinat kurvilinier  $(x_1, x_2, x_3)$  dituliskan sebagai:

$$d\vec{s} = \hat{e}_1 h_1 dx_1 + \hat{e}_2 h_2 dx_2 + \hat{e}_3 h_3 dx_3 \quad (52)$$

dengan  $h_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  merupakan koefisien yang dapat berupa fungsi  $(x_1, x_2, x_3)$ . Untuk sistem yang tidak ortogonal, elemen panjangnya diberikan oleh:

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{13}dx_1dx_3 \\ & g_{21}dx_2dx_1 + g_{22}dx_2^2 + g_{23}dx_2dx_3 \\ & g_{31}dx_3dx_1 + g_{32}dx_3dx_2 + g_{33}dx_3^2 \end{aligned} \quad (53)$$

dengan  $g_{ij} = h_i h_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$ . Dalam notasi dengan menggunakan indeks boneka (yang akan secara khusus dijelaskan dalam Bab 11), ungkapan (53) dapat dituliskan sebagai:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dx_i dx_j \quad (54)$$

Sedangkan dalam bentuk matriks diberikan oleh:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Untuk sistem yang ortogonal dengan mudah dapat dibuktikan bahwa  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ , dimana  $\delta_{ij}$  merupakan simbol kronecker delta, sehingga  $g_{ij} = 0$  untuk  $i \neq j$  dan mengakibatkan ungkapan (53) tereduksi menjadi:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 \quad (56)$$

dengan  $g_{11} = h_1^2$ ,  $g_{22} = h_2^2$  dan  $g_{33} = h_3^2$ .

## 7. Operator Vektor dalam Sistem Koordinat Kurvilinier Ortogonal

Pada pembahasan mengenai analisis vektor di Bab 6 buku Fisika matematika I, kita telah mempelajari mengenai bentuk operator gradient, divergensi, Laplacian dan rotasi dalam sistem koordinat kartesis. Dalam sistem koordinat kurvilinier yang ortogonal, operator gradien  $\vec{\nabla}$  yang bekerja pada sebuah fungsi skalar  $U$  memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\vec{\nabla}U = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (57)$$

*Contoh 2.3.* Tinjau operator gradien untuk sistem koordinat silinder. Karena  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \theta$  dan  $x_3 = z$  sedangkan  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$  dan  $h_3 = 1$ , maka diperoleh:

$$\vec{\nabla}U = \hat{e}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Selanjutnya, misalkan  $V$  merupakan sebuah fungsi vektor:

$$\vec{V} = \hat{e}_1 V_1(x_1, x_2, x_3) + \hat{e}_2 V_2(x_1, x_2, x_3) + \hat{e}_3 V_3(x_1, x_2, x_3) \quad (58)$$

maka divergensi dari fungsi tersebut diberikan oleh:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 V_3) \right] \quad (59)$$

*Contoh 2.4.* Tinjau divergensi fungsi untuk sistem koordinat bola. Karena  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \theta$  dan  $x_3 = \phi$  sedangkan  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$  dan  $h_3 = r \sin \theta$  (buktikan!), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta V_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r V_\phi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (V_\phi) \right] \end{aligned}$$

Sementara itu, untuk Laplacian yang bekerja pada fungsi skalar  $U$  diberikan oleh:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right] \quad (60)$$

*Contoh 2.5.* Tinjau operator gradien untuk sistem koordinat silinder. Karena  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \theta$  dan  $x_3 = z$  sedangkan  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$  dan  $h_3 = 1$ , maka diperoleh:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Terakhir, untuk operator rotasi yang bekerja pada fungsi vektor (58),  $\vec{\nabla} \times \vec{V}$  bentuk ungapannya diberikan oleh:

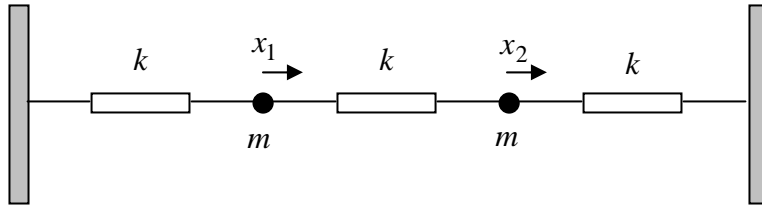
$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} \quad (61)$$

Untuk sistem koordinat silinder bentuknya adalah (buktikan!):

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \hat{e}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) + \hat{e}_\theta \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \hat{e}_z \left( \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \quad (62)$$

## 8. Contoh Penerapan dalam Fisika

Tinjau dua buah partikel dengan massa  $m_1$  dan  $m_2$  terikat secara mendatar pada tiga buah pegas dengan konstanta  $k$ , sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 3.



Gambar 3

Misalkan  $x_1$  dan  $x_2$  merupakan koordinat bagi partikel dengan massa  $m$ , sehingga energi kinetik sistem tersebut diberikan oleh:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad (63)$$

Untuk menentukan energi potensialnya dapat dilakukan dengan meninjau masing-masing pegas. Pegas di sebelah kiri mengalami peregangan sebesar  $x_1$  sehingga energi potensial yang ditimbulkan sebesar  $\frac{1}{2} k x_1^2$ , demikian juga dengan pegas di sebelah kanan yang tertekan sebesar  $x_2$  sehingga energi potensialnya adalah  $\frac{1}{2} k x_2^2$ . Sedangkan pegas yang ditengah regangannya adalah sebesar  $|x_1 - x_2|$ , sehingga energi potensial yang ditimbulkannya sebesar  $\frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$ . Dengan demikian total energi potensialnya diberikan oleh

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2} k (2x^2 + 2y^2 - 2xy) \quad (64)$$

dan Lagrangian yang terkaitnya adalah:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k (2x^2 + 2y^2 - 2xy) \quad (65)$$

Bentuk Lagrangian (65) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}k(x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Selanjutnya untuk menyederhanakan permasalahan, kita cari harga eigen bagi persamaan linier

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (67)$$

Dengan memecahkan persamaan karakteristik terkait diperoleh harga-harga eigen terkaitnya adalah  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_2 = 3$ . Melalui cara yang persis sama dengan yang telah digunakan pada pasal 5, diperoleh vektor eigen satuan untuk  $\lambda_1 = 1$  sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (68)$$

Sedangkan untuk  $\lambda_2 = 3$  adalah:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (69)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh matriks pendiagonalnya adalah:

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (70)$$

Sedangkan matriks diagonalnya diberikan oleh:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (71)$$

Dari sini dapat dicari sistem koordinat  $(x'_1, x'_2)$  melalui transformasi berikut:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (72)$$

dan

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \quad (73)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh Lagrangian dalam sistem koordinat baru sebagai berikut:

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{x}'_1 \quad \dot{x}'_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}k(x'_1 \quad x'_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad (74)$$

Perhatikan bahwa tranformasi similaritas yang melibatkan matriks  $D$  terhadap matriks identitas pada suku energi kinetik tidak mengubah bagian tersebut.

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (75)$$

dimana  $i = 1, 2$  diperoleh persamaan geraknya adalah:

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}'_1 \\ \ddot{x}'_2 \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

Solusi bagi persamaan (76) diberikan oleh:

$$x'_1 = A_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha_1 \right) \quad (77a)$$

$$x'_2 = A_2 \cos \left( \sqrt{\frac{3k}{m}} t + \alpha_2 \right) \quad (77b)$$

Dengan  $A_i$  dan  $\alpha_i$  merupakan konstanta yang tergantung pada kondisi awal. Kedua solusi merupakan modus normal dari vibrasi yang mungkin bagi sistem pegas yang dimaksud. Solusi (77a) terkait dengan vibrasi dengan frekuensi normal  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

sedangkan solusi  $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ . Jika solusi  $x'_1$  dan  $x'_2$  dikembalikan ke koordinat semula

melalui transformasi rotasi (72) dimana  $D^{-1} = D$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 + x'_2) \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 - x'_2) \end{aligned} \quad (79)$$

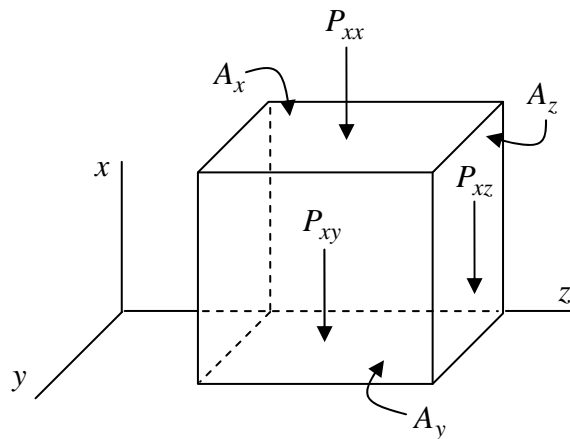
Berdasarkan persamaan (79) jelas terlihat bahwa dalam koordinat asal, secara umum gerak partikel yang dimaksud merupakan superposisi dari dua gerak yang berbeda. Terlihat bahwa untuk vibrasi dengan  $\omega_1$  bergerak dengan fase yang sama sedangkan untuk vibrasi dengan frekuensi  $\omega_2$  bergerak dengan fase yang berlawanan.

# BAB 11

## ANALISIS TENSOR

### 1. Pendahuluan

Selama ini kita telah mengenal besaran-besaran fisis yang direpresentasikan secara skalar seperti temperatur misalnya, yang hanya memiliki besar, maupun secara vektorial seperti posisi, yang juga mengandung informasi mengenai arah di samping besarnya. Pada dasarnya kedua cara representasi tersebut (skalar dan vektor), merupakan bagian dari suatu bentuk representasi yang lebih umum yang dinamakan sebagai "Tensor". Secara umum besaran-besaran tensor merepresentasikan kuantitas-kuantitas yang disajikan dalam bentuk matriks. Dalam hal ini, besaran skalar yang hanya dinyatakan oleh sebuah kuantitas yang memiliki harga tertentu, dapat dipandang sebagai tensor yang direpresentasikan oleh matriks  $1 \times 1$  dan dinamakan sebagai tensor rank-0 yang, dan jelas sedangkan bahwa untuk besaran vektor dapat dipandang sebagai besaran tensor dengan representasi matriks  $1 \times 3$  atau tensor rank-1.



Gambar 1

Sebagai contoh besaran tensor rank-2 yang representasinya dinyatakan oleh matriks  $3 \times 3$  adalah tensor tekanan yang dilambangkan dengan  $\vec{P}$ . Misalkan terdapat suatu volume berbentuk kubus yang pada bidang tegak lurus arah sumbu  $x$  mengalami tekanan dan geseran, sebagaimana diilustrasikan dalam Gambar 1. Terlihat bahwa pada bidang  $y-z$  mengalami tekanan  $P_{xx}$  yang merupakan gaya persatuan luas  $F_x/A_x$ ,



sedangkan bidang  $x-z$  dan  $x-y$  mengalami geseran  $P_{xy} = F_x/A_y$  dan  $P_{xz} = F_x/A_z$  berturut-turut dimana  $A_x$ ,  $A_y$  dan  $A_z$  adalah luas masing-masing bidang, maka untuk menentukan besar gaya total  $F_x$  dalam arah  $x$  yang bekerja pada kubus tersebut, maka tekanan dan geseran yang dimaksud dapat dinyatakan dalam bentuk matriks baris berikut:

$$(P_{xx} \quad P_{xy} \quad P_{xz}) \quad (1)$$

sedangkan luas ketiga sisi tersebut dinyatakan dalam vektor berbentuk bentuk matriks kolom:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Sehingga untuk memperoleh  $F_x$  dapat dilakukan dengan melakukan operasi berikut:

$$\begin{aligned} F_x &= (P_{xx} \quad P_{xy} \quad P_{xz}) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= P_{xx}A_x + P_{xy}A_y + P_{xz}A_z \end{aligned} \quad (3)$$

Perluasan bentuk di atas untuk mendapatkan gaya-gaya dalam arah  $F_y$  dan  $F_z$  dengan mudah dapat dilakukan dengan membentuk tensor tekanan  $\vec{P}$  sehingga:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \vec{P} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

dengan

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana, bentuk persamaan (3) dapat dituliskan sebagai:

$$\vec{F} = \vec{P} \cdot \vec{A} \quad (6)$$

Tensor tekanan pada persamaan (5) merupakan salah satu contoh besaran yang direpresentasikan dalam bentuk matriks, beberapa besaran lain didefinisikan dalam

bentuk tersebut antara lain misalnya adalah momen inersia benda tegar, suseptibilitas listrik-magnet dan lain sebagainya.

## 2. Indeks Boneka dan Konvesi Penjumlahan Einstein

Kembali kepada persamaan (4), jika kita gantikan indeks  $x$ ,  $y$  dan  $z$  dalam penulisan vektor  $\vec{F}$ ,  $\vec{A}$  dan tensor  $\vec{P}$  dengan notasi 1, 2 dan 3 berturut-turut dan selanjutnya kita definisikan indeks-indeks baru  $i$  dan  $j$ , dimana masing-masing dapat mewakili notasi 1 atau 2 atau 3, maka persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$F_i = \sum_{j=1}^3 P_{ij} A_j \quad (7)$$

Misal, untuk  $F_x \equiv F_1$ , dengan menetapkan  $i = 1$  sedangkan  $j$  berjalan dari 1 hingga 3, maka diperoleh:

$$F_1 = \sum_{j=1}^3 P_{1j} A_j = P_{11} A_1 + P_{12} A_2 + P_{13} A_3 \quad (8)$$

yang serupa dengan ungkapan pada persamaan (3). Perhatikan bahwa persamaan (7) juga dapat pula dituliskan dalam bentuk:

$$F_j = \sum_{i=1}^3 P_{ji} A_i \quad (9)$$

Jelas terlihat bahwa dengan menetapkan  $j = 1$  sedangkan kali ini  $i$  yang berjalan dari 1 hingga, 3 maka ungkapan (8) dapat diperoleh kembali. Secara khusus, indeks  $i$  dan  $j$  dinamakan indeks-indeks boneka (*dummy indices*), indeks boneka tersebut dapat saja dituliskan sebagai  $a$  dan  $b$  atau  $\alpha$  dan  $\beta$  dan lain sebagainya.

Pada penulisan persamaan (7) terlihat bahwa dalam ungkapan  $P_{ij} A_j$  indeks  $j$  muncul dua kali secara berurutan. Untuk menyingkat penulisan, telah lazim digunakan suatu konvensi yang dinamakan konvensi penjumlahan Einstein (*Einstein summation convention*), yang menyatakan bahwa setiap terdapat dua buah indeks boneka yang muncul berturut-turut maka secara implisit telah dimengerti bahwa penjumlahan terhadap indeks tersebut berlaku. Dalam konvensi ini penulisan ungkapan (7) adalah berikut:

$$F_i = P_{ij} A_j \equiv \sum_{j=1}^3 P_{ij} A_j \quad (10)$$

Perhatikan bahwa tanda penjumlahan  $\Sigma$  tidak digunakan lagi, karena dua indeks sama yang berurutan telah menunjukkan bahwa penjumlahan terhadapnya berlaku.

### 3. Tensor dalam Koordinat Kartesis

Tidak semua kuantitas yang direpresentasikan dalam bentuk matriks dapat dikategorikan sebagai besaran tensor. Dalam Fisika, tensor memiliki karakter tersendiri yang dikaitkan dengan bagaimana ia bertransformasi dari suatu sistem koordinat ke koordinat yang lain. Untuk dapat menjelaskan bagaimana mendefinisikan sebuah tensor di dalam sistem koordinat kartesis, kita akan terlebih dahulu meninjau definisi vektor dalam koordinat tersebut.

#### 3.1. Definisi Tensor

Tinjau vektor posisi  $\vec{r}$  yang bertransformasi ke secara rotasional ke koordinat kartesis lain yang komponennya dituliskan dalam bentuk berikut:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

dengan  $M$  adalah matriks rotasi yang bersifat ortogonal dan memenuhi  $M^{-1} = M^T$ , sehingga dengan demikian invers dari transformasi (11) adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

dimana  $M^T$  merupakan transpos matriks  $M$ . Telah ditunjukkan dalam Bab 10 bahwa transformasi ini menyebabkan invariannya panjang vektor tersebut:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (13)$$

Dari dapat disimpulkan bahwa terhadap tranformasi ortogonal panjang vektor posisi tidak berubah. Berdasarkan hal ini, maka cukup beralasan jika kita mengatakan bahwa sebuah kuantitas  $\vec{V}$  dinamakan merupakan vektor kartesis jika ia bertransformasi secara ortogonal mengikuti bentuk (11) dan (12), atau dalam penulisan yang lebih kompak:

$$\vec{V}' = M\vec{V} \quad \text{dan} \quad \vec{V} = M^T\vec{V}' \quad (14)$$

Dengan memanfaatkan penulisan menggunakan indeks boneka, transformasi (14) dapat dinyatakan sebagai:

$$V'_i = a_{ij}V_j \quad (15)$$

Dengan memanfaatkan definisi vektor kartesis (tensor kartesis rank-1) di atas, kita dapat mendefinisikan tensor rank-2 dengan  $3^2$  komponen sebagai berikut; tinjau tensor  $T_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , yang misalkan dapat dituliskan sebagai

$$T_{ij} = U_i W_j \quad (16)$$

Asumsikan bahwa  $U_i$  dan  $V_j$  merupakan komponen-komponen dari vektor  $\vec{U}$  dan  $\vec{W}$  yang bertransformasi secara ortogonal sebagai berikut:

$$U'_i = a_{ij}U_j \quad (17a)$$

$$W'_i = a_{ij}W_j \quad (17b)$$

Sehingga dengan demikian, jelas bahwa:

$$T'_{ij} = U'_i W'_j = a_{ik} U_k a_{jl} W_l \quad (18)$$

Dengan mengatur kembali posisi masing-masing suku, persamaan (18) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} U_k W_l \quad (19)$$

Mengingat  $U_k W_l = T_{kl}$ , maka dengan demikian:

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad (20)$$

Perlu dipertegas bahwa penulisan lengkap persamaan (20) adalah:

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad (21)$$

Khusus untuk tensor (16) yang diperoleh melalui perkalian langsung dua buah vektor, dan secara simbolik dituliskan sebagai:

$$\vec{T} = \vec{U} \otimes \vec{W} \quad (22)$$

dinamakan sebagai “dyadik” dan lambang “ $\otimes$ ” menyatakan operasi perkalian langsung atau *direct product* yang dalam bentuk matriks dituliskan sebagai:

$$T = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} (V_1 \quad V_2 \quad V_3) = \begin{pmatrix} U_1V_1 & U_1V_2 & U_1V_3 \\ U_2V_1 & U_2V_2 & U_2V_3 \\ U_3V_1 & U_3V_2 & U_3V_3 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Penting untuk dicatat bahwa penulisan transformasi (20) dapat dituliskan sebagai berikut

$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl} = a_{ik}T_{kl}(a_{jl})^T = a_{ik}T_{kl}a_{lj}$ , sehingga dalam bentuk matriks berbentuk:

$$T' = aTa^{-1} \quad (24)$$

dimana elemen dari matriks  $a$  adalah  $a_{ij}$  dan mengingat  $a^T = a^{-1}$ .

Dapat disimpulkan bahwa kuantitas umum  $T_{ij}$  merupakan sebuah tensor kartesis jika transformasinya ke dalam sistem koordinat kartesis lain mengikuti persamaan (20). Perluasan definisi tensor untuk rank-3 dapat dilakukan dengan mudah sebagai berikut; bahwa  $T_{ijk}$  merupakan sebuah tensor rank-3, dengan  $3^3$  komponen, dalam koordinat kartesis jika bertransformasi secara ortogonal mengikuti:

$$T'_{ijk} = a_{im}a_{jn}a_{kl}T_{mnl} \quad (25)$$

#### 4. Tensor dalam Sistem Koordinat Umum

Kembali pada bentuk transformasi (11). Tinjau hubungan untuk  $x'_1$  sebagai berikut:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad (26)$$

Untuk memperoleh kembali elemen matriks  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  dan  $a_{13}$  dapat diperoleh lewat ungkapan turunan parsial berikut:

$$a_{11} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1}, \quad a_{12} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_2}, \quad a_{13} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \quad (27)$$

sehingga transformasi koordinat (11) dapat dituliskan pula dalam bentuk:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (28)$$

atau

$$x'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} x_j \quad (29)$$

Perlu ditekankan bahwa hubungan (28) dan (29) diturunkan untuk kasus dimana hubungan antara komponen dalam sistem koordinat lama dan baru merupakan hubungan yang bersifat linier. Untuk kasus transformasi dari koordinat kartesis ke koordinat silinder  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$  misalnya, jelas terlihat bahwa hubungannya tidak linier, sehingga dengan demikian hubungan semacam (29) tidak dapat menghubungkan keduanya. Tetapi, jika kita tinjau kuantitas berikut:

$$\begin{pmatrix} dx'_1 \\ dx'_2 \\ dx'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 & 0 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad (49)$$

dimana  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \theta$  dan  $x_3 = z$  sedangkan  $x'_1 = x$ ,  $x'_2 = y$  dan  $x'_3 = z$ , maka dengan mudah dapat dilihat bahwa:

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \cos x_2, \quad \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} = -x_1 \sin x_2, \quad \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} = 0 \quad (50a)$$

$$\frac{\partial x'_2}{\partial x_1} = \sin x_2, \quad \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} = x_1 \cos x_2, \quad \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} = 0 \quad (50b)$$

$$\frac{\partial x'_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} = 1 \quad (50c)$$

sehingga dengan demikian dapat dituliskan:

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad (51)$$

Berdasarkan kenyataan ini, kita dapat membuat definisi untuk vektor dalam sistem koordinat umum sebagai kuantitas yang bertransformasi menurut:

$$V'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j \quad (52)$$

Khusus untuk koordinat kartesis, dapat dengan mudah dibuktikan bahwa:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (53)$$

Tetapi hal ini dapat saja tidak berlaku bagi transformasi koordinat umum. Berdasarkan hal ini, dalam sistem koordinat umum kita dapat membedakan jenis vektor terkait dengan bagaimana mereka bertransformasi mengikuti:

$$V'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j \quad (54)$$

atau

$$V'_i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} V_j \quad (55)$$

Jika  $\vec{V}$  bertransformasi menurut persamaan (54), maka vektor tersebut dinamakan vektor kontravarian, sedangkan jika menurut persamaan (55) dinamakan vektor kovarian. Jelas bahwa berdasarkan kategori tersebut, diferensial dari koordinat umum merupakan komponen dari kontravarian vektor, sebagaimana yang oleh persamaan (51)

Dari sini, serupa dengan pembahasan mengenai definisi tensor kartesis, maka tensor secara umum dalam sebarang koordinat didefinisikan serupa dengan persamaan (20). Lebih khusus lagi berdasarkan klasifikasi bentuk kovarian dan kontravarian, maka jenis-jenis tensor rank – 2 misalnya dapat dibagi menjadi:

$$\text{Tensor kontravarian : } T'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x'_j}{\partial x_n} T_{mn} \quad (56a)$$

$$\text{Tensor kovarian : } T'_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_m} \frac{\partial x_j}{\partial x'_n} T_{mn} \quad (56b)$$

$$\text{Tensor campuran : } T'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_j}{\partial x'_n} T_{mn} \quad (56c)$$

Sebagai catatan akhir, penggunaan konsep tensor yang dikaitkan dengan sifat geometri transformasi koordinat banyak dijumpai dalam Teori Relativitas Einstein.

## BAB 12

### FUNGSI-FUNGSI KHUSUS

#### 1. Pendahuluan

Pada bab ini dibahas perumusan mengenai beberapa fungsi-fungsi khusus yang didefinisikan baik dalam bentuk integral maupun deret. Fungsi-fungsi ini kerap muncul dalam Fisika sebagai solusi bagi suatu persamaan diferensial tertentu atau bagi keperluan lainnya. Secara umum fungsi-fungsi ini tidak memiliki bentuk eksak yang tertutup dan nilainya telah dihitung secara aproksimatif dan disajikan dalam bentuk tabel. Tujuan pembahasan dalam bab ini bukan untuk mendalami secara detail sifat-sifat fungsi tersebut, tetapi lebih ditekankan pada pengenalan definisinya.

#### 2. Fungsi Gamma

Fungsi pertama yang kita tinjau adalah fungsi Gamma  $\Gamma(x)$  yang didefinisikan sebagai hasil dari bentuk integral berikut:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1)$$

Telah diketahui bahwa bentuk integral pada ruang kanan persamaan (1) tidak dapat diselesaikan. Integral di atas dapat dibuktikan konvergen untuk semua  $x > 0$ , walaupun dalam rentang  $0 < x < 1$  menjadi tak wajar mengingat fungsi integran singular pada limit bawahnya. Selanjutnya lakukan integrasi perbagian berikut:

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \underbrace{-t^{x-1} e^{-t}}_{=0} \Big|_0^{\infty} + (x-1) \underbrace{\int_0^{\infty} t^{(x-1)-1} e^{-t} dt}_{\Gamma(x-1)} \quad (2)$$

sehingga diperoleh suatu hubungan rekursif:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (3)$$

Misalkan  $x \equiv n$  merupakan bilangan integer, maka berdasarkan hubungan rekursif (3) dapat kita peroleh bahwa:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \times \cdots \times 1 \cdot \Gamma(1) \end{aligned} \quad (4)$$

Dari integral (1) jelas terlihat bahwa:



$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (5)$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (6)$$

atau dapat pula dituliskan sebagai:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (7)$$

Jelas bahwa untuk  $n$  yang integer, fungsi  $\Gamma$  merupakan fungsi faktorial. Berdasarkan persamaan (7), kadang pula dituliskan untuk sebarang  $x$  bentuk berikut:

$$\Gamma(x+1) = x! \quad (8)$$

sehingga  $\Gamma$  lazim pula dinamakan sebagai fungsi faktorial.

Untuk mengetahui secara lengkap rentang definisinya, tinjau definisi (1) yang dengan jelas mengindikasikan bahwa untuk  $x > 1$ ,  $\Gamma$  terdefinisi. Selanjutnya tinjau persamaan (3) dituliskan kembali dalam bentuk berikut:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \quad (9)$$

Karena  $\Gamma(1) = 1$ , Jelas bahwa

$$\Gamma(0) = \infty \quad (10)$$

sehingga  $x = 0$  tidak masuk dalam rentang definisi. Sekarang tinjau rentang  $0 < x < 1$ . Berdasarkan persamaan (9) dengan jelas terlihat bahwa dalam rentang tersebut fungsi  $\Gamma$  terdefinisi mengingat  $\Gamma(x+1)$  terdefinisi pada  $0 < x < 1$ . Selanjutnya misalkan  $x = -1$ , maka diperoleh:

$$\Gamma(-1) = \frac{1}{-1} \Gamma(0) = \infty \quad (11)$$

dan mengingat hubungan rekursi (9), maka untuk semua  $x = -n$  dapat dituliskan sebagai (buktikan!):

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(0)}{-n(-n+1)(-n+2) \times \dots \times (-1)} \quad (12)$$

atau (buktikan!):

$$\Gamma(-n) = \frac{1}{(-1)^n n!} \Gamma(0) \quad (13)$$

maka jelas bahwa fungsi  $\Gamma$  juga tidak terdefinisi untuk semua integer negatif. Kemudian tinjau persamaan (9) untuk rentang  $-1 < x < 0$  :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{-|x|} \Gamma(-|x|+1) \quad (14)$$

dimana  $1-|x| > 0$ , yang mengindikasikan bahwa dalam rentang tersebut fungsi tersebut juga terdefinisi. Dengan mengacu pada hubungan rekursi (3) jelas bahwa untuk  $x < 0$  yang bukan integer negatif  $\Gamma(x)$  terdefinisi. Dari hasil di atas jelas dapat disimpulkan bahwa rentang terdefinisinya fungsi  $\Gamma$  adalah  $x = \{-\infty < x < \infty, x \notin 0, -n\}$  dengan  $n$  integer positif.

Tinjau kasus dengan  $x = 1/2$ . Berdasarkan definisi (1) integral yang harus dipecahkan adalah:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \quad (15)$$

Misalkan kita lakukan substistusi variabel  $t = u^2$  sehingga  $dt = 2udu$ , maka persamaan (15) menjadi:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2udu = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \quad (16)$$

yang juga dapat dituliskan kembali dalam variabel boneka lainnya sebut saja  $w$  sebagai berikut:

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-w^2} dw \quad (17)$$

Dengan mengalikan persamaan (15) dengan (16) diperoleh:

$$\Gamma^2(1/2) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+w^2)} dudw \quad (18)$$

Selanjutnya lakukan transformasi ke koordinat polar  $u = r \cos \theta$  dan  $w = r \sin \theta$  dengan  $u^2 + w^2 = r^2$  dan  $dudw = r dr d\theta$  sehingga:

$$\Gamma^2(1/2) = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \quad (19)$$

Dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa hasil integral (18) diberikan oleh:

$$4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi \quad (20)$$

sehingga dengan demikian diperoleh bahwa:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (21)$$

Hubungan lain yang penting terkait dengan fungsi  $\Gamma$  adalah:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (22)$$

Hal lain yang patut dicatat adalah, bahwa untuk  $x$  yang cukup besar, nilai  $\Gamma(x+1)$  dapat diaproksimasi melalui formula Stirling berikut:

$$\Gamma(x+1) \sim x! \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \quad (23)$$

*Contoh 2.1.* Tentukan  $\Gamma(5/2)$ . Tuliskan  $\Gamma(5/2) = 3/2 \Gamma(3/2) = (3/2)(1/2)\Gamma(1/2)$ .

Karena  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , maka  $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ .

### 3. Fungsi Beta

Fungsi Beta,  $B(x, y)$  didefinisikan sebagai:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (24)$$

Dengan melakukan transformasi variabel  $t = \sin^2 \theta$ , sehingga  $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$  dan  $1-t = \cos^2 \theta$  dimana syarat batas  $t=1$  terkait dengan  $\theta = \pi/2$ , diperoleh bentuk lain bagi fungsi B :

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta \quad (25)$$

Sedangkan jika dilakukan transformasi  $t = u/(1+u)$  (buktikan!) diperoleh bentuk alternatif lainnya:

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1} du}{(1+u)^{x+y}} \quad (26)$$

Dalam hubungannya dengan fungsi  $\Gamma$ , dapat ditunjukkan bahwa:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (27)$$

Berdasarkan hubungan di atas, maka untuk menentukan nilai bagi fungsi B dapat dilakukan dengan menggunakan tabel fungsi  $\Gamma$ . Perlu ditekankan bahwa rentang definisi bagi fungsi B mengikuti rentang fungsi  $\Gamma$  dengan mengacu pada hubungan (26).

Untuk membuktikannya, tinjau bentuk berikut:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} dt ds \quad (28)$$

Kemudian lakukan transformasi berikut:

$$t = uw, \quad s = u(1-w) \quad (29)$$

dengan modulus Jacobian terkait diberikan oleh (buktikan!):

$$|J| = \left| \frac{\partial(t,s)}{\partial(u,w)} \right| = u \quad (30)$$

Mengingat batas bawah integrasi dalam domain  $t$  dan  $s$  adalah  $t=0$  dan  $s=0$ , sedangkan batas atasnya adalah  $t=\infty$  dan  $s=\infty$ , maka jika kita mengambil batas bawah untuk  $u=0$  sedangkan batas atasnya adalah  $u=\infty$ , maka sebagai konsekuensinya, batas bawah untuk variabel  $w=0$  dan  $w=1$  untuk batas atasnya. Berdasarkan hal ini, maka transformasi integral (27) ke variabel  $(u, w)$  adalah:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^1 \int_0^{\infty} u^{x+y-1} w^{x-1} (1-w)^{y-1} e^{-u} du dw \quad (31)$$

Dengan mengatur kembali integral (31) ke dalam bentuk berikut:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \underbrace{\int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw}_{B(x,y)} \underbrace{\int_0^{\infty} u^{x+y-1} e^{-u} du}_{\Gamma(x+y)} \quad (32)$$

maka diperoleh:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = B(x, y)\Gamma(x+y) \quad (33)$$

Sehingga persamaan (26) terpenuhi.

#### 4. Integral dan Fungsi Eliptik

Tinjau bentuk integral berikut:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (34)$$

yang dinamakan sebagai integral eliptik jenis pertama dan:

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (35)$$

sebagai integral eliptik jenis kedua. Dimana  $k$  dengan rentang  $0 \leq k \leq 1$  dinamakan sebagai modulus dan  $\varphi$  amplitudo dari integral eliptik (33) dan (34). Integral eliptik dinamakan integral eliptik lengkap jika amplitudonya  $\varphi = \pi/2$ .

Integral (33) dan (34) merupakan bentuk integral eliptik versi Legendre. Melalui transformasi:

$$x = \sin \varphi \quad (36)$$

dengan

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (37)$$

sehingga diperoleh bentuk lain sebagai berikut:

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \quad (38a)$$

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx \quad (38b)$$

yang dinamakan sebagai integral eliptik versi Jacobi. Bentuk integral eliptik baik dalam versi Legendre maupun Jacobi tidak dapat secara umum tidak dapat dievaluasi secara analitik. Nilai-nilainya untuk amplitudo tertentu disediakan dalam bentuk tabel yang diperoleh secara numerik.

Tinjau bentuk integral eliptik Jacobi (38a). Jika diambil  $k = 0$ , maka dapat dengan mudah diperoleh:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} x \quad (39)$$

dimana  $u \equiv F(x, 0)$ .

Jika kita lakukan inversi terhadap persamaan (39) maka diperoleh:

$$\sin u = x \quad (40)$$

Dengan memperluas cara pandang di atas untuk kasus dengan  $k \neq 0$  dan dengan mendefinisikan secara umum  $u \equiv F(x, k)$ , maka serupa dengan persamaan (39) dapat dituliskan bentuk berikut bagi sebarang integral eliptik yang terkait:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \operatorname{sn}^{-1} x \quad (41)$$

Dan serupa pula dengan (40) dituliskan inversi untuk (41):

$$\operatorname{sn} u = x = \sin \varphi \quad (42)$$

[cf. persamaan (36)]. Dimana secara khusus  $\operatorname{sn} u$  dinamakan fungsi eliptik Jacobi.

Mirip dengan fungsi-fungsi trigonometrik, dapat pula didefinisikan fungsi eliptik Jacobi  $\operatorname{cn} u$  melalui hubungan:

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u} = \cos \varphi \quad (43)$$

Tinjau kembali integral eliptik versi Legendre pada persamaan (34), jelas terlihat bahwa:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (44)$$

Berdasarkan hubungan (44) dapat pula didefinisikan fungsi  $\operatorname{dn} u$  melalui pendefinisian berikut:

$$\operatorname{dn} u = \frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} \quad (45)$$

Jelas bahwa fungsi-fungsi tersebut memenuhi hubungan:

$$\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1 \quad (46a)$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1 \quad (46b)$$

Selanjutnya, untuk mengetahui turunan bagi masing-masing fungsi terhadap “variabel”  $u$  :

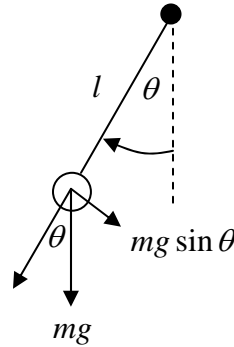
$$\frac{d(\operatorname{sn} u)}{du} = \frac{d(\sin \varphi)}{du} = \cos \varphi \frac{d\varphi}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \quad (47a)$$

$$\frac{d(\operatorname{cn} u)}{du} = \frac{d(\cos \varphi)}{du} = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \quad (47b)$$

$$\frac{d(\operatorname{dn} u)}{du} = \frac{d}{du} \left( \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right) = -\frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \frac{d\varphi}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \quad (47c)$$

## 5. Contoh Penerapan dalam Fisika

Sebagai contoh kasus sederhana kita tinjau gerakan bandul sederhana yang terjadi akibat dipengaruhi oleh gaya gravitasi.



Gambar 1.

Berdasarkan hukum kedua Newton, penggambaran dinamika gerak bandul dengan massa  $m$  tersebut diberikan oleh persamaan diferensial berikut:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (48)$$

Persamaan (48) dapat dipecahkan manipulasi sebagai berikut; kalikan kedua ruas persamaan dengan  $d\theta/dt$ , sehingga

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{l} \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \quad (49)$$

Kemudian berdasarkan identitas  $\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  dan  $-\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\cos \theta)}{dt}$ ,

Selanjutnya kalikan persamaan (49) dengan  $ml^2$  sehingga persamaan (48) dapat kembali dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} ml^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgl \cos \theta \right] = 0 \quad (50)$$

Suku pertama pada ungkapan persamaan di atas tidak lain merupakan energi kinetik dari bandul tersebut  $E_K = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$  sedangkan ungkapan suku kedua tidak lain merupakan energi potensial bandul  $E_P = -mgl \cos \theta$  yang diukur dari pangkal tali, sehingga jelas suku pada kurung siku tersebut adalah energi total bandul  $E$ . Karena ruas kanan persamaan (48) sama dengan nol, maka ungkapan di dalam kurung siku pada ruas kiri harus merupakan sebuah konstanta:

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl \cos \theta = E \quad (51)$$

dimana  $E > 0$ . Dengan sedikit manipulasi akhirnya diperoleh:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos \theta} \quad (52)$$

yang merupakan persamaan diferensial nonlinier orde satu. Persamaan (51) dapat diselesaikan secara implisit dengan mengubahnya menjadi:

$$\left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos \theta}} \quad (53)$$

Sehingga solusinya adalah:

$$\int_0^t \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} dt = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos \theta}} \quad (54)$$

atau

$$t = \left(\frac{l}{2g}\right)^{1/2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos \theta}} \quad (55)$$

Ruas kanan pada solusi implisit (55) dapat ditransformasikan menjadi integral eliptik. Untuk memperolehnya, gunakan identitas trigonometri  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta/2$  kemudian

definisikan  $k = \left(\frac{E}{mgl} + 1\right)^{1/2}$  sehingga ungkapan (56) berubah menjadi



$$t = \left( \frac{l}{2g} \right)^{1/2} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - 2 \sin^2 \theta/2}} \quad (56)$$

Kemudian definisikan  $\sin \theta/2 = k \sin \phi / \sqrt{2}$  dengan  $\cos(\theta/2) d\theta = \sqrt{2} k \cos \phi d\phi$ , sehingga

$$t = \left( \frac{l}{g} \right)^{1/2} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi/2}} \quad (57)$$

Selanjutnya tinjau integral pada ruas kanan persamaan (57), misalkan  $x = \sin \phi$  dengan  $dx = \cos \phi d\phi$  dan  $\cos^2 \phi = 1 - x^2$ , sehingga:

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi/2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2/2}} \quad (58)$$

dan jelas bahwa:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2/2}} = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi/2}} \quad (59).$$

Dari sini, kita dapat memformulasikan solusi eksplisit bagi persamaan nonlinier (48) dengan menuliskan kembali integral (56) sebagai:

$$t = \left( \frac{l}{g} \right)^{1/2} \operatorname{sn}^{-1}(\sin \phi) = \left( \frac{l}{g} \right)^{1/2} \operatorname{sn}^{-1} \left[ \left( \frac{\sqrt{2} \sin \theta/2}{k} \right) \right] \quad (60)$$

sehingga dengan demikian solusi eksplisit yang dicari adalah:

$$\theta(t) = 2 \sin^{-1} \left\{ \frac{k}{\sqrt{2}} \operatorname{sn} \left[ \left( \frac{g}{l} \right)^{1/2} t \right] \right\} \quad (61)$$

dengan modulus  $k/\sqrt{2}$ .

## BAB 13

### SOLUSI DERET PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

#### 1. Pendahuluan

Pada Bab 8 buku Fisika Matematika I, kita telah membahas beberapa teknik untuk memecahkan persamaan diferensial biasa (PDB) secara analitik, sehingga diperoleh solusi yang bersifat eksak dalam bentuk fungsi tertentu. Pada umumnya, tidak semua persamaan diferensial biasa dapat dipecahkan melalui teknik-teknik tersebut, sehingga diperlukan metode lain seperti metode numerik, metode solusi deret atau metode-metode lainnya. Pada bab ini, secara khusus dibahas metode penyelesaian untuk kelas-kelas PDB tertentu melalui metode penyelesaian solusi deret polinom.

Pada dasarnya, solusi deret ini dalam batasan tertentu dapat pula menghasilkan solusi eksak yang terkait dengan fungsi eksak non-polinomial. Tetapi pada umumnya, solusi yang menghendaki kehadiran deret yang jumlahnya tidak berhingga tersebut belum tentu dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi eksak non-polinomial. Sebagai contoh sederhana, tinjau PDB berikut:

$$y'' = -y \quad (1)$$

dengan  $y'' = d^2y/dx^2$ . Jelas, bahwa PDB (1) memiliki solusi:

$$y = A \cos x + B \sin x \quad (2)$$

dengan  $A$  dan  $B$ . Sekarang kita misalkan bahwa solusi bagi PDB tersebut berbentuk deret polinom yang dituliskan sebagai berikut:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (3)$$

dengan  $c_n$  merupakan koefisien ekspansi yang dapat berbentuk bilangan kompleks. Substitusikan persamaan (3) ke dalam persamaan (1) dengan (buktikan!):

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

sehingga diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (4)$$

Perhatikan bahwa penjumlahan pada ruas kiri dan kanan persamaan (4) tidak sama. Agar penjumlahannya memiliki struktur yang sama, kita pergunakan indeks boneka  $m$ , dimana  $m = n - 2$ , selanjutnya, indeks boneka pada suku di ruas kanan persamaan (4) kita gantikan juga dengan  $m$  sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk berikut:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m = - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad (5)$$

Dari sini dapat dengan mudah dilihat bahwa kita dapat mendefinisikan hubungan antara  $c_m$  dengan  $c_{m+2}$  melalui hubungan:

$$c_{m+2} = - \frac{1}{(m+2)(m+1)} c_m \quad (6)$$

yang diperoleh dengan menyamakan pangkat variabel  $x$ . Kita tinjau terlebih dahulu untuk  $m = 0$  dan  $m = 1$ :

$$c_2 = - \frac{1}{2 \times 1} c_0, \quad c_3 = - \frac{1}{3 \times 2} c_1 \quad (7)$$

Sekarang kita gunakan koefisien-koefisien  $c_2$  dan  $c_3$  untuk memperoleh  $c_4$  dan  $c_5$ :

$$c_4 = - \frac{1}{4 \times 3} c_2, \quad c_5 = - \frac{1}{5 \times 4} c_3 \quad (8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (7) ke dalam persamaan (8) diperoleh:

$$c_4 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} c_0 = - \frac{(-1)}{4!} c_0 \quad (9a)$$

$$c_5 = \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} c_1 = - \frac{(-1)}{5!} c_1 \quad (9b)$$

Dari hubungan-hubungan di atas, jelas bahwa secara umum untuk  $c_m$  lainnya dengan  $m \geq 2$  yang genap dan ganjil dapat diperoleh melalui hubungan rekursi berikut (buktikan!):

$$c_m = (-1)^{m/2} \frac{1}{m!} c_0, \quad m \text{ genap} \quad (10a)$$

$$c_m = (-1)^{(m+1)/2} \frac{1}{m!} c_1, \quad m \text{ ganjil} \quad (10b)$$

Dengan demikian, ekspansi deret yang diberikan pada persamaan (1) dapat dituliskan dalam basis  $c_0$  dan  $c_1$  sebagai berikut:

$$y = c_0 \sum_{m=\text{genap}}^{\infty} (-1)^{m/2} \frac{x^m}{m!} + c_1 \sum_{m=\text{ganjil}}^{\infty} (-1)^{(m+1)/2} \frac{x^m}{m!} \quad (11)$$

Jika kita uraikan secara eksplisit ungkapan (11) sebagai berikut:

$$y = c_0 \underbrace{\left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right)}_{\cos x} + c_1 \underbrace{\left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)}_{\sin x} \quad (12)$$

Berdasarkan uraian Taylor, deret dengan koefisien  $c_0$  dan  $c_1$  tidak lain adalah  $\cos x$  dan  $\sin x$ . Dengan menyamakan  $c_0 = A$  dan  $c_1 = B$ , maka solusi PDB (1) yang diberikan oleh persamaan (2) diperoleh kembali.

Persoalan di atas adalah contoh dimana solusi deret (12) yang diperoleh dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi tertentu, yang alam hal ini adalah  $\cos x$  dan  $\sin x$ . Sebagaimana telah disinggung di awal, bahwa hal ini tidak berlaku umum. Selanjutnya, dari solusi (12) jelas terlihat bahwa masing-masing deret polinom bersifat konvergen, dan ini adalah kondisi yang harus dipenuhi agar deret tersebut merupakan solusi bagi PDB terkait.

## 2. Metode Frobenius

Secara umum, suatu PDB dapat memiliki beberapa buah solusi sekaligus. Tetapi, berdasarkan solusi deret yang dicontohkan pada bagian pendahuluan di atas, kita hanya memperoleh satu jenis solusi. Untuk mengantisipasi hal tersebut, telah diperkenalkan suatu metode solusi deret yang secara khusus dinamakan metode Frobenius. Sedikit berbeda dengan bentuk ekspansi polinom yang diberikan oleh persamaan (3), pada metode Frobenius ini bentuk ekspansi polinom-nya diberikan oleh:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s} \quad (13)$$

Telah diperkenalkan parameter riil baru, yakni  $s$ , pada ekspansi (13) yang akan diperlihatkan kemudian dapat menentukan jumlah solusi yang mungkin bagi PDB terkait.

Untuk melihat hal tersebut, ada baiknya jika kita meninjaunya melalui contoh sebagaimana yang dilakukan dalam bagian pendahuluan. Tinjau PDB berikut:

$$x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0 \quad (14)$$

dengan  $y' = dy/dx$ . Berdasarkan ekspansi (13) maka untuk  $y'$  dan  $y''$  masing-masing diberikan oleh:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)c_n x^{n+s-1} \quad (15a)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)c_n x^{n+s-2} \quad (15b)$$

Substitusikan ungkapan (15) ke dalam persamaan (14) diperoleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)c_n x^{n+s} + 4(n+s)c_n x^{n+s} + 2c_n x^{n+s} + c_n x^{n+s+2} = 0 \quad (16)$$

Perhatikan suku terakhir pada ruas kiri persamaan (16):  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s+2}$ , dengan mengganti

$n \rightarrow n-2$ , maka ungkapan tersebut dapat dituliskan kembali dalam bentuk berikut:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+s} \quad (17)$$

sehingga persamaan (16):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)c_n x^{n+s} + 4(n+s)c_n x^{n+s} + 2c_n x^{n+s} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+s} = 0 \quad (18)$$

atau

$$\begin{aligned} & (s^2 + 3s + 2)c_0 x^s + (s^2 + 5s + 6)c_1 x^{1+s} + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} (n+s)(n+s-1)c_n x^{n+s} + 4(n+s)c_n x^{n+s} + 2c_n x^{n+s} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+s} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

dimana dua suku pada baris pertama persamaan (19) berasal dari  $n=0$  dan  $n=1$ . Di pihak lain, hubungan rekursif untuk  $c_n$  untuk  $n \geq 2$  diberikan oleh:

$$\begin{aligned} c_{n-2} &= -[(n+s)(n+s-1) + 4(n+s) + 2]c_n \\ &= -[(n+s)(n+s+3) + 2]c_n \end{aligned} \quad (20)$$

Sedangkan untuk  $n=0$  yang terkait dengan  $x^s$  berlaku kondisi:

$$(s^2 + 3s + 2)c_0 = 0 \quad (21)$$

Karena secara umum  $c_0 \neq 0$ , sehingga dengan demikian:

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \quad (22)$$

Persamaan (22) secara khusus dinamakan sebagai persamaan *indicial*. Dari sini diperoleh harga yang mungkin untuk parameter  $s$  adalah:

$$s = -2 \text{ dan } s = -1 \quad (23)$$

Selanjutnya tinjau untuk  $n = 1$  yang terkait dengan  $x^{1+s}$  berlaku pula kondisi :

$$(s^2 + 5s + 6)c_1 = 0 \quad (24)$$

Untuk kasus dengan  $s = -2$ , dapat dengan mudah dibuktikan bahwa  $s^2 + 5s + 6 = 0$ , dan dengan sendirinya persamaan (23) terpenuhi. Di pihak lain, untuk  $s = -1$ ,  $s^2 + 5s + 6 \neq 0$ , sehingga persamaan (23) menghendaki  $c_1 = 0$ .

Setelah diperoleh harga dari parameter  $s$ , selanjutnya dapat dicari solusi bagi masing-masing harga. Sebelumnya, kita tuliskan kembali hubungan rekursif (20) dalam bentuk:

$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{(n+s)(n+s+3)+2} \quad (25)$$

Tinjau untuk  $s = -2$ , dimana hubungan (25) menjadi:

$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{n(n-1)}, \text{ untuk } n \geq 2 \quad (26)$$

Untuk kasus  $n$  genap diperoleh:

$$c_2 = \frac{-c_0}{2!}, c_4 = \frac{c_0}{4!}, c_6 = \frac{c_0}{6!}, \dots, c_n = (-1)^{n/2} \frac{c_0}{n!} \quad (27)$$

Sedangkan untuk  $n$  ganjil

$$c_3 = \frac{-c_1}{3!}, c_5 = \frac{c_1}{5!}, c_7 = \frac{-c_1}{7!}, \dots, c_n = -(-1)^{(n+1)/2} \frac{c_1}{n!} \quad (28)$$

Dengan demikian berdasarkan ekspansi (17) solusi yang diperoleh adalah:

$$y = x^{-2} \left[ c_0 + c_0 \sum_{n=\text{genap} \geq 2}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{x^n}{n!} + c_1 x - c_1 \sum_{n=\text{ganjil} \geq 2}^{\infty} (-1)^{(n+1)/2} \frac{x^n}{n!} \right] \quad (29)$$

Dengan sedikit manipulasi, serta mengacu pada deret (12), solusi (29) dapat diubah menjadi:

$$y = c_0 x^{-2} \sum_{n=\text{genap} \geq 0}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{x^n}{n!} + c_1 x^{-2} \left[ x - \sum_{n=\text{ganjil} \geq 2}^{\infty} (-1)^{(n+1)/2} \frac{x^n}{n!} \right] \quad (30)$$

sehingga bentuk tertutup persamaan (30) adalah:

$$y = \frac{c_0 \cos x + c_1 \sin x}{x^2} \quad (31)$$

Selanjutnya tinjau kasus dengan  $s = -1$ , dimana hubungan rekursi (25) diberikan oleh:

$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{n(n+1)}, \text{ untuk } n \geq 2 \quad (32)$$

Mengingat untuk kasus ini  $c_1 = 0$ , maka  $c_n = 0$  untuk  $n$  ganjil, sedangkan untuk  $n$  genap diberikan oleh:

$$c_2 = \frac{-c_0}{3!}, c_4 = \frac{c_0}{5!}, c_6 = \frac{c_0}{7!}, \dots, c_n = (-1)^{n/2} \frac{c_0}{(n+1)!} \quad (33)$$

sehingga solusinya adalah:

$$y = c_0 x^{-1} \sum_{n=\text{genap} \geq 0}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{x^n}{(n+1)!} \quad (34)$$

Dengan mengubah persamaan (34) menjadi:

$$y = c_0 x^{-2} \sum_{n=\text{genap} \geq 0}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (35)$$

diperoleh bentuk tertutupnya adalah:

$$y = \frac{c_0 \sin x}{x^2} \quad (36)$$

Terlihat bahwa bagian dengan koefisien  $c_1$  pada solusi (31) sama dengan solusi (36).

Dengan kata lain dapat disimpulkan bahwa solusi  $y \sim \sin x/x^2$ , pada dasarnya terkait dengan  $s = -2$  dan  $s = -1$  sekaligus, sedangkan  $y \sim \cos x/x^2$  terkait dengan  $s = -1$  saja.

Sebagai catatan akhir, secara umum metode Frobenius dapat dipergunakan untuk memecahkan PDB dalam bentuk:

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad (37)$$

dimana  $p(x)$ ,  $q(x)$  dan  $r(x)$  merupakan polinom dalam  $x$ . Untuk memperoleh persamaan indicial bagi parameter  $s$  dilakukan dengan memasukkan ekspansi (13) ke dalam PDB terkait dan selanjutnya dengan mengelompokkan suku-suku dengan pangkat  $x$  terkecil. Perlu ditekankan bahwa metode ini tidak selalu berhasil dalam penerapannya.

### 3. Persamaan dan Polinom Legendre

Selanjutnya, dengan menggunakan metode Frobenius kita akan memecahkan salah satu PDB yang banyak ditemui dalam Fisika yang dikenal sebagai persamaan Legendre dalam bentuk berikut:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \quad (37)$$

dimana  $x^2 \leq 1$  sehingga bisa diparametrisasi oleh sudut  $\theta$  melalui fungsi  $\cos \theta$  dan  $l \geq 0$  merupakan bilangan integer. Persamaan (37) banyak dijumpai untuk problem yang menyangkut sistem koordinat bola.

#### 3.1. Solusi PDB Legendre

Berdasarkan ekspansi (13) dan turunannya (15) diperoleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)c_n x^{n+s-2} - [(n+s)(n+s+1) + l(l+1)]c_n x^{n+s} = 0 \quad (38)$$

Dengan mengatur kembali indeks  $n \rightarrow n+2$  didapatkan bentuk:

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+s+2)(n+s+1)c_{n+2} x^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(n+s+1) - l(l+1)]c_n x^{n+s} = 0 \quad (39)$$

atau

$$s(s-1)c_0 x^{-2+s} + s(s+1)c_1 x^{-1+s} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+s+2)(n+s+1)c_{n+2} x^{n+s} - [(n+s)(n+s+1) - l(l+1)]c_n x^{n+s} = 0 \quad (40)$$

Terlihat bahwa suku pertama pada baris pertama persamaan (40):

$$s(s-1) = 0 \quad (41)$$

merupakan persamaan indicial terkait dengan akar  $s = 0$  dan  $s = 1$ . Sedangkan dari baris kedua persamaan (40) diperoleh hubungan rekursif:

$$c_{n+2} = \frac{(n+s)(n+s+1) - l(l+1)}{(n+s+1)(n+s+2)} c_n \quad (42)$$



Tinjau kasus dengan  $s = 1$ . Pada kasus ini, jelas terlihat bahwa suku kedua pada baris pertama persamaan (40):  $s(s+1)c_1$ , menghendaki  $c_1 = 0$ . Sehingga mengakibatkan semua koefisien dengan  $n$  ganjil berharga nol. Di pihak lain, hubungan rekursif untuk kasus ini diberikan oleh:

$$c_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - l(l+1)}{(n+2)(n+3)} c_n, \text{ untuk } n \text{ genap} \quad (43)$$

Sekarang kita tinjau untuk kasus  $l = 0$ . Dapat dengan mudah diperlihatkan bahwa solusi yang terkait adalah (buktikan!):

$$y = xc_0 \left( 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{7}x^6 \dots \right) = xc_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} x^{2m} \quad (44)$$

Karena selang untuk variabel  $x$  adalah  $-1 \leq x \leq 1$ , maka salah satu syarat yang harus dipenuhi adalah deret yang dibentuk harus konvergen pada  $x^2 = 1$ , walaupun deret tersebut konvergen untuk  $x^2 < 1$ . Pada titik  $x^2 = 1$ , kita memiliki deret

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \quad (45)$$

Melalui uji integral berikut:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2m+1} dm = \infty \quad (46)$$

terlihat bahwa deret tersebut tidak konvergen. Sehingga dapat disimpulkan bahwa deret tersebut bukan solusi untuk PDB Legendre dengan  $l = 0$ .

Melalui cara yang sama tetapi jauh lebih rumit dapat diperlihatkan bahwa untuk PDB Legendre dengan  $l \neq 0$ , kasus  $s = 1$  tersebut juga tidak memberikan deret yang konvergen pada  $x^2 = 1$ . Dapat disimpulkan bahwa kasus dengan  $s = 1$  tidak memberikan solusi bagi PDB yang dimaksud.

Selanjutnya tinjau kasus dengan  $s = 0$ , dimana hubungan rekursifnya diberikan oleh:

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad (47)$$

Berbeda dengan  $s = 1$ , pada kasus ini secara umum  $c_1 \neq 1$ . Perhatikan ungkapan

$$n(n+1) - l(l+1) \quad (48)$$

pada hubungan rekursif (47). Melalui manipulasi berikut bentuk tersebut dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned} n(n+1) - l(l+1) &= n^2 + n - l^2 - l \\ &= n^2 - l^2 + n - l \\ &= (n+l)(n-l) + (n-l) \\ &= (n-l)(n+l+1) \end{aligned} \quad (49)$$

Sehingga (47) berubah menjadi:

$$c_{n+2} = \frac{(n-l)(n+l+1)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad (50)$$

atau dalam bentuk yang lebih menguntungkan:

$$c_{n+2} = -\frac{(l-n)(n+l+1)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad (51)$$

Seperti halnya dengan contoh-contoh sebelumnya, maka pada kasus ini pun terdapat dua konstanta yakni  $c_0$  dan  $c_1$  yang masing-masing terkait dengan  $c_n$  genap dan ganjil melalui hubungan rekursif (51). Selanjutnya jabarkan solusi terkait dengan memisahkan antara bagian dengan  $n$  genap dan ganjil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y = c_0 &\left( 1 - \frac{l(l+1)}{2!} x^2 - \frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!} x^4 + \frac{l(l-2)(l-4)(l+1)(l+3)(l+5)}{6!} x^6 + \dots \right) \\ &+ c_1 \left( x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!} x^3 + \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!} x^5 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(l-1)(l-3)(l-5)(l+2)(l+4)(l+6)}{7!} x^7 + \dots \right) \end{aligned} \quad (52)$$

Tinjau sebagai contoh pertama kasus dengan  $l = 0$ , dimana solusi (52) berubah menjadi:

$$y = c_0 + xc_1 \left( 1 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{5} x^4 + \frac{1}{7} x^6 + \dots \right) \quad (53)$$

dimana suku-suku lainnya untuk koefisien  $c_0$  lenyap akibat perkalian dengan  $l = 0$ .

Terlihat bahwa untuk  $x^2 = 1$ , suku dalam kurung pada ruas kanan persamaan membentuk deret harmonik:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \quad (54)$$

yang divergen. Jelas agar solusi tersebut memenuhi syarat konvergensi pada selang  $|x| \leq 1$ , maka harus diambil  $c_1 = 0$ , sehingga solusi yang dimaksud adalah:

$$y = c_0 \quad (55)$$

Kemudian selanjutnya tinjau untuk kasus  $l = 1$ , dengan solusi terkait berbentuk:

$$y = c_0 \left( 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \dots \right) + c_1x \quad (56)$$

Menarik, bahwa pada kasus ini pun untuk  $x^2 = 1$ , suku dalam kurung pada ruas kanan solusi (56) juga membentuk deret harmonik (54) yang divergen. Dengan demikian jelas bahwa solusi yang benar untuk kasus  $l = 1$  adalah dengan mengambil  $c_0 = 0$ , sehingga solusinya adalah:

$$y = c_1x \quad (57)$$

Sebagai contoh terakhir, tinjau kasus dengan  $l = 2$ . Solusi (52) tereduksi menjadi:

$$y = c_0 \left( 1 - 3x^2 \right) + xc_1 \left( 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{35}x^6 + \dots \right) \quad (58)$$

dimana untuk  $x^2 = 1$  solusi tersebut konvergen jika  $c_1 = 0$ , sehingga solusinya adalah:

$$y = c_0 \left( 1 - 3x^2 \right) \quad (59)$$

Melalui cara yang sama, solusi-solusi lainnya yang terkait dengan  $l > 2$  dapat dibentuk. Pada pasal berikut akan ditunjukkan bahwa solusi PDB Legendre tersebut membentuk suatu polinom yang dinamakan Polinom Legendre.

Berdasarkan solusi deret bagi PDB Legendre yang telah diperoleh, terlihat bahwa yang memberikan solusi hanya dari akar persamaan indicial  $s = 0$ . Secara umum, untuk bentuk PDB dalam bentuk persamaan diferensial (37) berlaku teorema berikut; jika bagi fungsi polinom  $p(x)$  pada PDB tersebut berlaku  $p(0) \neq 0$ , maka dalam kasus tersebut hanya  $s = 0$  yang memberikan solusi konvergen. Dalam kasus PDB terlihat bahwa  $p(x) = 1 - x^2$ , dimana  $p(0) = 1$ . Sedangkan jika  $p(0) = 0$ , maka akar-akar persamaan indicial  $s \neq 0$  dapat memberikan solusi yang konvergen.

### 3.2. Polinom Legendre

Telah kita peroleh solusi bagi PDB Legendre untuk kasus  $l = 0, 1$  dan  $2$  sebagai berikut:

$$y_0(x) = c_0, \quad y_1(x) = c_1x, \quad y_2(x) = c_0(1 - 3x^2) \quad (60)$$

dengan  $y \equiv y_l(x)$ , dimana subskrip  $l$  menunjukkan bahwa  $y_l$  adalah solusi untuk harga  $l$  terkait. Berdasarkan solusi tersebut, polinom Legendre  $P_l(x)$  didefinisikan sebagai polinom yang terkait dengan solusi-solusi tersebut dimana kondisi  $P_l(1) = y_l(1) = 1$  berlaku. Misalkan untuk  $l = 2$ , dari kondisi  $y_2(1) = 1$  menghendaki  $c_0 = -1/2$ , sehingga polinom Legendre yang terkait adalah:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (61)$$

Dengan cara yang sama diperoleh  $P_0(x) = 1$  dan  $P_1(x) = x$ , sedangkan polinom untuk  $l$  lainnya dapat dicari dengan mengatur kembali solusi (52) dan mengkondisikan  $y_l(1) = 1$ . Tetapi jelas cara itu tidak efektif, mengingat kita harus mengatur kembali deret tersebut. Secara sederhana, polinom Legendre dapat diperoleh dengan cara yang relatif mudah melalui formula Rodrigues berikut:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (62)$$

Untuk  $l = 0$ :

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0}{dx^0} (x^2 - 1)^0 = \frac{1}{1 \cdot 1} \frac{d1}{d1} = 1 \quad (63)$$

Sedangkan untuk  $l = 1$ :

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d^1}{dx^1} (x^2 - 1)^1 = \frac{1}{2 \cdot 1} \frac{d(x^2 - 1)}{dx} = x \quad (64)$$

Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa polinom Legendre (61) dapat pula diperoleh dari formula tersebut.

Tinjau fungsi berikut:

$$\Phi(x, h) = \sqrt{1 - 2xh + h^2} \quad (65)$$

dengan  $|h| < 1$ . Uraian Taylor disekitar  $h = 0$  bagi fungsi tersebut adalah (buktikan!):

$$\Phi(x, h) = 1 + xh + \frac{1}{2}(3x^2 - 1)h^2 + \dots \quad (66)$$

Terlihat bahwa tiga suku tersebut tidak lain adalah polinom-polinom Legendre sehingga uraian tersebut dapat dituliskan kembali dalam bentuk berikut:

$$\Phi(x, h) = h^0 P_0(x) + h^1 P_1(x) + h^2 P_2(x) + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x) \quad (67)$$

Fungsi  $\Phi(x, h)$  secara khusus dinamakan sebagai fungsi pembangkit (*generating function*) bagi polinom Legendre.

Untuk membuktikan bahwa ekspansi Taylor (67) memang merupakan polinom Legendre tinjau diferensial berikut:

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{3(1 - x^2)h^2}{\Phi^{5/2}} - \frac{2xh}{\Phi^{3/2}} \quad (68)$$

yang bentuknya diambil mengacu pada PDB Legendre (37). Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa suku pada ruas kanan persamaan (68) adalah:

$$\frac{3(1 - x^2)h^2}{\Phi^{5/2}} - \frac{2xh}{\Phi^{3/2}} = -h \frac{\partial^2 (h\Phi)}{\partial h^2} \quad (69)$$

Sehingga persamaan (68) menjadi:

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + h \frac{\partial^2 (h\Phi)}{\partial h^2} = 0 \quad (70)$$

Selanjutnya dengan mesubstitusikan ekspansi (67) diperoleh:

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x) \right) - 2x \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x) \right) + h \frac{\partial^2}{\partial h^2} \left( \sum_{l=0}^{\infty} h^{l+1} P_l(x) \right) = 0 \quad (71)$$

atau

$$(1 - x^2) \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l''(x) - 2x \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l'(x) + l(l+1) \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x) = 0 \quad (72)$$

dengan  $P_l'' \equiv d^2 P_l / dx^2$  dan  $P_l' \equiv dP_l / dx$ . Karena penjumlahan pada PDB (72) tersebut memiliki pangkat yang sama dalam  $h$ , maka untuk setiap orde-nya berlaku:

$$(1 - x^2) P_l'' - 2x P_l' + l(l+1) P_l = 0 \quad (73)$$

yang tidak lain merupakan PDB Legendre, sehingga dengan demikian  $P_l(x)$  pada ekspansi (67) adalah polinom Legendre.

### 3.2.1. Hubungan rekursi

Salah satu kegunaan dari fungsi pembangkit ini adalah untuk memperoleh hubungan rekursi di antara polinom Legendre yang berbeda orde. Tinjau identitas berikut:

$$(x-h)\frac{\partial\Phi}{\partial x} = h\frac{\partial\Phi}{\partial h} \quad (74)$$

Dengan mensubstitusikan ekspansi (67) diperoleh:

$$(x-h)\sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l' = h\sum_{l=0}^{\infty} lh^{l-1} P_l = \sum_{l=0}^{\infty} lh^l P_l \quad (75)$$

atau

$$\sum_{l=0}^{\infty} xh^l P_l' - \sum_{l=0}^{\infty} h^{l+1} P_l' = \sum_{l=0}^{\infty} lh^l P_l \quad (76)$$

Selanjutnya kita samakan orde dari masing-masing suku dengan mengantikan  $l \rightarrow l-1$  untuk suku dengan  $h^{l+1}$ , sehingga:

$$\sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l' - \sum_{l=1}^{\infty} h^l P_{l-1}' = \sum_{l=1}^{\infty} lh^l P_l \quad (77)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh untuk setiap  $h^l$  dimana  $l \geq 1$  hubungan rekursi berikut:

$$xP_l'(x) - P_{l-1}'(x) = lP_l(x) \quad (78)$$

Melalui manipulasi yang serupa terhadap identitas lain seperti persamaan (74), dapat pula diperoleh beberapa hubungan rekursi lain diantaranya:

$$(2l+1)P_l(x) = P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) \quad (79a)$$

$$P_l'(x) - xP_{l-1}'(x) = lP_{l-1}(x) \quad (79b)$$

$$(1-x^2)P_l'(x) = lP_{l-1}'(x) - lxP_l(x) \quad (79c)$$

### 3.2.2. Ortogonalitas

Salah satu sifat penting yang dimiliki polinom Legendre adalah ortogonalitasnya, dimana:

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x)dx = 0, \text{ jika } l \neq k \quad (80)$$

Untuk membuktikannya, tinjau PDB (37) untuk  $P_l(x)$  dan  $P_k(x)$  dalam bentuk berikut:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right] + l(l+1)P_l = 0 \quad (81a)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_k}{dx} \right] + k(k+1)P_k = 0 \quad (81b)$$

Kemudian kalikan persamaan (81a) dengan  $P_k(x)$  dan (81b) dengan  $P_l(x)$ , lalu integrasikan dengan batas  $-1$  sampai  $1$ :

$$\int_{-1}^1 P_k \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_l' \right] dx + l(l+1) \int_{-1}^1 P_l P_k dx = 0 \quad (82a)$$

$$\int_{-1}^1 P_l \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_k' \right] dx + k(k+1) \int_{-1}^1 P_l P_k dx = 0 \quad (82b)$$

Selanjutnya kurangkan persamaan (82a) dengan (82b):

$$\int_{-1}^1 P_k \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_l' \right] dx - \int_{-1}^1 P_l \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_k' \right] dx + l(l+1) \int_{-1}^1 P_l P_k dx - k(k+1) \int_{-1}^1 P_l P_k dx = 0 \quad (83)$$

dan evaluasi integral berikut:

$$\int_{-1}^1 P_k \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_l' \right] dx - \int_{-1}^1 P_l \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_k' \right] dx \quad (84)$$

Melalui integrasi perbagian diperoleh untuk masing-masing integral pada persamaan (83) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_k \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_l' \right] dx &= P_k \underbrace{(1-x^2) P_l'}_{=0} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) P_l' P_k' dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2) P_l' P_k' dx \end{aligned} \quad (85)$$

Dengan cara yang sama diperoleh pula:

$$\int_{-1}^1 P_l \frac{d}{dx} [(1-x^2)P_k'] dx = - \int_{-1}^1 (1-x^2)P_l'P_k' dx \quad (86)$$

Sehingga dengan demikian persamaan (83) menjadi:

$$[l(l+1) - k(k+1)] \int_{-1}^1 P_l P_k dx = 0 \quad (87)$$

Jelas bahwa jika  $l \neq k$ , maka berlaku sifat ortogonalitas (80).

Berdasarkan sifat ortogonalitas tersebut, polinom Legendre dapat digunakan sebagai basis untuk menyatakan sebarang polinom lainnya atau dengan kata lain polinom tersebut dapat dipandang sebagai basis dari sebuah ruang vektor linier yang elemennya adalah fungsi-fungsi polinomial. Misalkan kita memiliki sebarang polinom berorde  $n$ ,  $Q_n(x)$ , maka polinom tersebut dapat dibangun atas superposisi polinom Legendre sebagai berikut:

$$Q_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \dots \quad (88)$$

dimana ortogonalitas-nya menjamin kondisi bebas linier berikut:

$$0 = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \dots \quad (89)$$

jika dan hanya jika seluruh  $a_n = 0$ . Berdasarkan hal ini, jelas bahwa terhadap polinom Legendre  $P_l(x)$  sebarang polinom  $Q_n(x)$  berorde  $n$  dimana  $l > n$  berlaku:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) Q_n(x) dx = 0 \quad (90)$$

*Contoh 3.1.* Tinjau polinom  $Q_1(x) = x - 1$ . Tunjukkan bahwa  $\int_{-1}^1 P_2(x) Q_1(x) dx = 0$

dengan  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$  adalah polinom Legendre orde dua Evaluasi integral berikut:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_2(x) Q_1(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (3x^2 - 1)(x - 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3x^3 - 3x^2 - x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{4} x^4 - x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x \right]_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$



Kelengkapan polinom Legendre lainnya yang penting adalah normalisasi polinom tersebut yang didefinisikan sebagai:

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{N^2} \quad (91)$$

dengan  $N$  merupakan faktor normalisasi. Untuk mengevaluasi integral (91), gunakan hubungan rekursi (78) yang dikalikan dengan  $P_l(x)$  dan diintegrasikan dengan batas  $-1$  sampai  $1$  berikut:

$$\int_{-1}^1 l[P_l(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 xP_l(x)P_l'(x)dx - \int_{-1}^1 P_l(x)P_{l-1}'(x)dx \quad (92)$$

Perhatikan integral kedua pada ruas kanan persamaan (92), berdasarkan sifat yang ditunjukkan pada persamaan (90) integral tersebut berharga nol mengingat  $P_{l-1}'$  merupakan polinom yang orde tertingginya adalah  $l-2$ , karena selain berindeks  $l-1$ , juga telah diturunkan terhadap  $x$ . Selanjutnya, evaluasi melalui integrasi perbagian terhadap integral pertama pada ruas kanan persamaan (92), yakni dengan memilih  $u = xP_l(x)$  dan  $dv = P_l'(x)dx$ , menghasilkan (buktikan!):

$$\int_{-1}^1 xP_l(x)P_l'(x)dx = \frac{x}{2}[P_l(x)]^2 \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx \quad (93)$$

Sehingga persamaan (92) menjadi:

$$\int_{-1}^1 l[P_l(x)]^2 dx = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx \quad (94)$$

Dari sini dengan mudah diperoleh bahwa:

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1} \quad (95)$$

dan faktor normalisasi yang dimaksud adalah:

$$N = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \quad (96)$$

Hal ini mengindikasikan bahwa polinom:

$$\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x) \quad (97)$$

merupakan polinom Legendre yang ortonormal.

#### 4. Fungsi Legendre Terasosiasi

Tinjau bentuk PDB berikut:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (98)$$

dengan  $m^2 \leq l^2$ . PDB tersebut memiliki solusi yang terkait dengan polinom Legendre  $P_l(x)$ . Melalui transformasi berikut:

$$y = (1-x^2)^{m/2} w \quad (99)$$

Sehingga PDB (98) menjadi:

$$(1-x^2)w'' - 2(m+1)xw' + [l(l+1) - m(m+1)]w = 0 \quad (100)$$

Jelas terlihat bahwa untuk  $m = 0$ , persamaan tersebut tereduksi menjadi PDB Legendre sehingga solusinya adalah  $w(x) = P_l(x)$ . Dengan mendiferensiasikan persamaan (100) terhadap  $x$  diperoleh bentuk:

$$(1-x^2)w''' - 2xw'' - 2(m+1)(w' + xw'') + [l(l+1) - m(m+1)]w' = 0 \quad (101)$$

atau

$$(1-x^2)v'' - 2[(m+1)+1]xv' + [l(l+1) - (m+1)(m+2)]v = 0 \quad (102)$$

dengan solusi  $v \equiv w'(x) = P_l'(x)$  untuk  $m = 0$ . Pada kondisi ini, PDB (102) berbentuk:

$$(1-x^2)v'' - 4xv' + [l(l+1) - 2]v = 0 \quad (103)$$

atau dalam bentuk yang serupa dengan PDB (100), PDB (103) dapat dituliskan sebagai :

$$(1-x^2)v'' - 2(m+1)xv' + [l(l+1) - m(m+1)]v = 0 \quad (104)$$

dengan  $m = 1$ . Sehingga dengan demikian jelas bahwa  $v = P_l'(x)$  merupakan solusi bagi PDB (100) dengan  $m = 1$ . Melalui cara ini, solusi PDB tersebut dapat diperluas untuk sebarang  $m$  yakni:

$$w(x) = \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \quad (105)$$

Sedangkan solusi untuk PDB (98), berdasarkan transformasi (99), diberikan oleh:

$$y(x) \equiv P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l}{dx^m} \quad (106)$$

Fungsi  $P_l^m(x)$  secara khusus dinamakan sebagai fungsi Legendre terasosiasi (*associated Legendre function*) yang dapat pula diperoleh melalui formula Rodrigue berikut:

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (107)$$

Sedangkan sifat ortogonalitasnya diberikan oleh:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0 & , \quad l \neq k \\ \frac{2}{2l+1} \frac{(k+m)!}{(k-m)!} & , \quad l = k \end{cases} \quad (108)$$

Dalam Fisika, PDB dengan bentuk serupa dengan (98) juga kerap kali muncul.

## 5. Persamaan dan Fungsi Bessel

Sebagaimana halnya dengan persamaan Legendre, persamaan Bessel berikut:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (109)$$

dengan  $\nu$  merupakan sebarang konstanta (tidak perlu integer), banyak dijumpai pada persoalan-persoalan di dalam Fisika, terutama untuk problem yang terkait dengan koordinat silinder.

Kembali kita gunakan metode Frobenius dengan mensubstitusikan ekspansi (13). Perhatikan, dengan mengacu pada bentuk umum PDB (37) jelas bahwa untuk PDB (109)  $p(0) = 0$ , sehingga pada ekspansi yang diambil  $s \neq 0$ . Substitusi ekspansi (13) menghasilkan (buktikan!):

$$(s^2 - \nu^2) c_0 x^s + [(s+1)^2 - \nu^2] c_1 x^{1+s} + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+s)^2 - \nu^2] c_n + c_{n-2}\} x^{n+s} = 0 \quad (110)$$

Jelas terlihat bahwa persamaan indicial terkaitnya adalah:

$$s^2 - \nu^2 = 0 \quad (111)$$

dengan akar-akar  $s = \pm \nu$ , yang menghendaki  $c_1 = 0$ .

Dari suku ketiga pada ruas kiri persamaan (110) terlihat bahwa hubungan rekursi bagi koefisien  $c_n$  dengan  $n \geq 2$  genap dan  $s = v$  diberikan oleh:

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(n+v)^2 - v^2} = -\frac{c_{n-2}}{n(n+2v)} \quad (112)$$

Selanjutnya, untuk memperoleh bentuk yang lebih mudah dikenali, lakukan transformasi  $n \rightarrow 2n$  sehingga hubungan (112) berubah menjadi:

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2n(2n+2v)} = -\frac{c_{2n-2}}{2^2 n(n+v)} \quad (113)$$

Dengan memanfaatkan fungsi Gamma dengan relasi berikut:

$$\Gamma(n+v+1) = (n+v)\Gamma(n+v) \quad (114)$$

maka hubungan rekursi (113) kembali dapat dinyatakan sebagai:

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}\Gamma(n+v)}{2^2 n\Gamma(n+v+1)} \quad (115)$$

Untuk memperoleh bentuk umum hubungan (115), kita tinjau terlebih dahulu bentuk eksplisit untuk masing-masing koefisien:

$$c_2 = -\frac{c_0\Gamma(1+v)}{2^2 \times 1 \times \Gamma(2+v)} \quad (116a)$$

$$c_4 = -\frac{c_2\Gamma(2+v)}{2^2 \times 2 \times \Gamma(3+v)} = -\frac{c_0\Gamma(1+v)\Gamma(2+v)}{2^4 \times 2! \times \Gamma(2+v)\Gamma(3+v)} = -\frac{c_0\Gamma(1+v)}{2^4 \times 2! \times \Gamma(3+v)} \quad (116b)$$

$$c_6 = -\frac{c_4\Gamma(3+v)}{2^2 \times 3 \times \Gamma(4+v)} = -\frac{c_0\Gamma(1+v)\Gamma(2+v)\Gamma(3+v)}{2^6 \times 3! \times \Gamma(2+v)\Gamma(3+v)\Gamma(4+v)} = -\frac{c_0\Gamma(1+v)}{2^6 \times 3! \times \Gamma(4+v)} \quad (116c)$$

Dari pola di atas, terlihat bahwa:

$$c_n = (-1)^{n/2} \frac{c_0\Gamma(1+v)}{2^n \times (n/2)! \times \Gamma(n/2+v+1)} \quad (117)$$

Sehingga dengan demikian solusi yang diperoleh adalah:

$$\begin{aligned} y &= x^p \sum_{n=\text{genap}}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{c_0\Gamma(1+v)}{2^n (n/2)! \Gamma(n/2+v+1)} x^n \\ &= x^p \sum_{n=\text{genap}}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{c_0\Gamma(1+v)}{(n/2)! \Gamma(n/2+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \end{aligned} \quad (118)$$

Selanjutnya dengan menggunakan hubungan dan identitas:

$$(n/2)! = \Gamma(n/2 + 1) \quad (119a)$$

$$x^\nu = 2^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (119b)$$

solusi (118) menjadi:

$$y = c_0 2^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \Gamma(1+\nu) \sum_{n=\text{genap}}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)\Gamma(n/2+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (120)$$

Dengan mengambil:

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} \quad (121)$$

mengakibatkan:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=\text{genap}}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)\Gamma(n/2+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (122)$$

Pada penjumlahan dalam solusi (122) dengan  $n$  integer genap, dapat diperlihatkan bahwa kuantitas  $n/2 = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ , sehingga dengan melakukan perubahan indeks boneka  $n = 2m$ , solusi (122) kembali dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} = J_\nu(x) \quad (123)$$

dimana penjumlahan terhadap  $m$  tidak lagi terbatas untuk integer genap saja, tetapi juga untuk yang ganjil. Secara khusus solusi (123) yang merupakan fungsi variabel  $x$  dinamakan sebagai fungsi Bessel jenis pertama yang disimbolkan dengan  $J_\nu(x)$ . Dalam bentuk lain, bentuk eksplisit fungsi Bessel dapat dinyatakan sebagai berikut (buktikan!):

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \quad (124)$$

Melalui cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa untuk  $s = -\nu$ , solusi yang terkait adalah:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} \quad (125)$$

Dibandingkan dengan  $J_\nu(x)$ , jelas terlihat bahwa untuk beberapa suku pertama dalam deret tersebut dapat memiliki polinom dalam  $x$  dengan pangkat negatif serta memiliki koefisien yang berbeda. Hal ini menunjukkan bahwa untuk  $\nu$  yang non-integer kedua fungsi  $J_\nu(x)$  dan  $J_{-\nu}(x)$  merupakan fungsi yang saling bebas, artinya satu sama lain tidak dapat dihubungkan satu sama lain. Perlu dicatat bahwa untuk  $\nu$  merupakan integer, beberapa suku pertama deret tersebut berharga nol, mengingat  $\Gamma(-n) = \infty$ .

*Contoh 3.2.* Buktikan untuk  $\nu$  integer berlaku  $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ . Tinjau:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} \quad (i)$$

Dengan melakukan transformasi  $n = m + \nu$ , bentuk (i) berubah menjadi:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=-\nu}^{\infty} \frac{(-1)^{m+\nu}}{\Gamma(m+\nu+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \quad (ii)$$

Terlihat bahwa batas bawah  $m$  dimulai dari  $-\nu$  yang mengakibatkan:

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(-\nu+1 \leq 0) = \infty \quad (iii)$$

Hal ini menyebabkan suku yang berarti dalam deret (ii) dimulai dari  $m = 0$ , sehingga:

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+\nu+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} = (-1)^\nu J_\nu(x) \quad \therefore \quad (iv)$$

Sebagaimana halnya polinom Legendre, fungsi Bessel juga memiliki hubungan rekursi yang diantaranya adalah:

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad (126a)$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = 2\nu x^{-1} J_\nu(x) \quad (126b)$$

Sedangkan ortogonalitasnya didefinisikan sebagai:

$$\int_0^1 x J_\nu(px) J_\nu(qx) dx = \begin{cases} 0 & , \quad p \neq q \\ \frac{1}{2} J_\nu^2(p) = \frac{1}{2} J_{-\nu}^2(p) & , \quad p = q \end{cases} \quad (127)$$

Berdasarkan contoh 3.2. di atas, jelas terlihat bahwa untuk  $\nu$  integer,  $J_\nu(x)$  dan  $J_{-\nu}(x)$  tidak saling bebas. Dipihak lain, untuk  $\nu$  yang non-integer, sebagaimana telah

disinggung di awal, keduanya saling bebas sehingga superposisi keduanya juga solusi. Tinjau bentuk superposisi berikut:

$$N_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)} \quad (128)$$

yang dinamakan sebagai fungsi Bessel jenis kedua dan dikenal dengan nama fungsi Neumann atau Weber atau. Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa untuk  $\nu$  integer fungsi (128) menjadi  $0/0$ . Tetapi, untuk  $x \neq 0$ , dapat pula dibuktikan bahwa untuk limit  $\nu \rightarrow$  integer menghasilkan solusi yang memenuhi PDB Bessel. Secara umum, solusi bagi PDB Bessel (109) dapat dituliskan sebagai berikut:

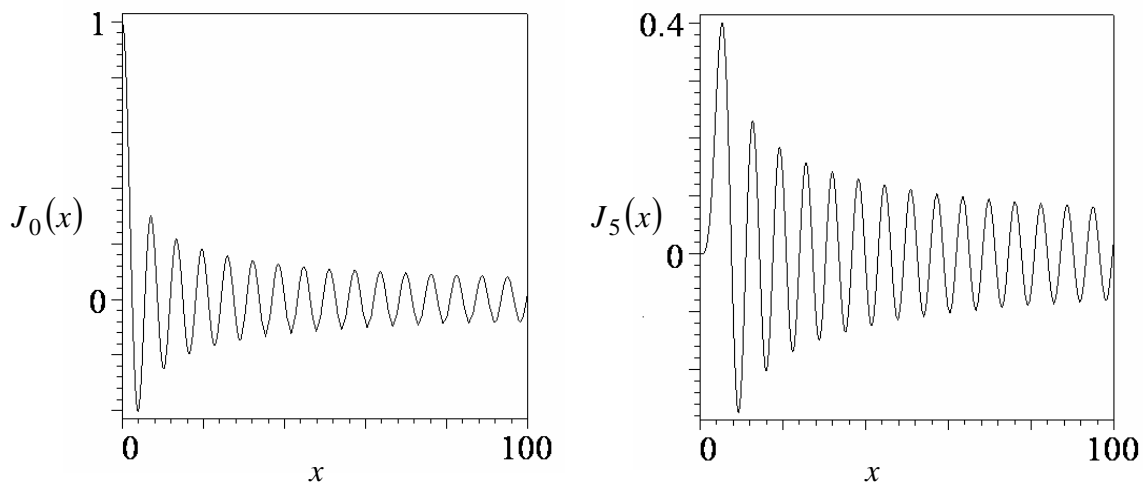
$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x) \quad (129)$$

dengan  $A$  dan  $B$  merupakan konstanta. Berdasarkan kombinasi linier fungsi Bessel jenis pertama dan kedua, dapat pula didefinisikan fungsi Bessel jenis ketiga atau fungsi Hankel:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad (130a)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \quad (130b)$$

Dicontohkan pada Gambar 1 plot fungsi  $J_0(x)$  dan  $J_5(x)$ .



Gambar 1

Berdasarkan Gambar 1 tersebut, terlihat bahwa fungsi Bessel jenis pertama tersebut memiliki kelakuan yang berbeda untuk harga  $x$  yang kecil dan besar. Sesuai dengan

fakta ini, dalam aplikasinya cukup berguna jika kita mengetahui formula pendekatan untuk masing-masing harga. Seperti halnya untuk fungsi Bessel jenis pertama, untuk harga  $x$  yang kecil formula pendekatannya diberikan oleh:

$$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (131)$$

Sedangkan untuk  $x$  yang besar:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ x - (2\nu+1)\frac{\pi}{4} \right] \quad (132)$$

Untuk fungsi-fungsi lainnya pembaca dapat menjumpainya pada buku-buku teks standard tingkat lanjut.

## 6. Persamaan Diferensial Biasa Seperti-Bessel

Tinjau PDB seperti-Bessel berikut:

$$x^2 y'' + x(1 - 2a_1)y' + \left[ (a_2 a_3 x^{a_3})^2 + a_1^2 - \nu^2 a_2^2 \right] y = 0 \quad (133)$$

dengan  $a_1$ ,  $a_2$ , dan  $a_3$  merupakan konstanta. PDB (133) memiliki solusi yang terkait dengan fungsi-fungsi Bessel sebagai berikut:

$$y(x) = x^{a_1} B_\nu(a_2 x^{a_3}) \quad (134)$$

dengan

$$B_\nu(a_2 x^{a_3}) = J_\nu(a_2 x^{a_3}) + N_\nu(a_2 x^{a_3}) \quad (135)$$

Merupakan superposisi linier dari fungsi Bessel jenis pertama dan kedua.

*Contoh 3.3.* Tentukan solusi PDB

$$xy'' + by' + ky = 0 \quad (i)$$

Dengan mengalikan persamaan di atas dengan  $x$  diperoleh.

$$x^2 y'' + bxy' + kxy = 0 \quad (ii)$$

Sehingga dengan demikian persamaan untuk konstanta-konstanta yang terlibat diberikan oleh:

$$a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_2 a_3 = \sqrt{k} \quad (iii)$$

$$1 - 2a_1 = b, \quad a_1 = \nu a_2 \quad (iv)$$



Dari persamaan (iii) dan (iv) diperoleh  $a_2 = 2\sqrt{k}$  dan  $a_1 = (1-b)/2$ , sehingga:

$$v = \frac{1-b}{4\sqrt{k}} \quad (v)$$

## 6. Contoh Penerapan dalam Fisika

Sebagai contoh kemuculan PDB Legendre dan Bessel, kita tinjau persamaan Maxwell untuk divergensi medan listrik skalar dalam vakum yang dinyatakan dalam formulasi medan skalar, dimana persamaan diferensial terkaitnya berbentuk persamaan Laplace berikut:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (136)$$

Dalam sistem koordinat bola, persamaan (136) secara eksplisit diberikan oleh:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] = 0 \quad (137)$$

Kemudian tinjau kasus dengan simetri dalam  $\varphi$  dengan melakukan separasi variabel dengan mendefinisikan solusi bagi persamaan (137) dalam bentuk berikut:

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (138)$$

dimana fungsi dalam  $\varphi$  tidak dimasukkan karena merupakan konstanta akibat simetri.

Substitusikan (138) ke dalam (137) diperoleh persamaan-persamaan untuk  $R$  dan  $\Theta$ :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \alpha \quad (139a)$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\alpha \quad (139b)$$

Selanjutnya kita fokus pada persamaan (139b) yang dituliskan kembali dalam bentuk:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \alpha \Theta = 0 \quad (140)$$

Dengan melakukan transformasi variabel berikut:

$$u = \cos \theta \quad (141)$$

dan  $\Theta(\theta) \rightarrow P(u)$ , diperoleh:

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \sin \theta \frac{dP}{du} \quad (142)$$

Di pihak lain, berdasarkan tranformasi tersebut diperoleh pula:

$$\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d}{du} \quad (142)$$

Sehingga dengan demikian persamaan (139b) menjadi:

$$\frac{d}{du} \left[ (1-u^2) \frac{dP}{du} \right] + \alpha P = 0 \quad (143)$$

atau

$$(1-u^2) \frac{d^2 P}{du^2} - 2u \frac{dP}{du} + \alpha P = 0 \quad (144)$$

Jelas, bahwa PDB (144) tidak lain adalah PDB Legendre jika diasumsikan  $\alpha = l(l+1)$ .

Tinjau kembali persamaan Laplace (136), tetapi kali ini dalam sistem koordinat silinder, yang diberikan oleh:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (145)$$

dan kembali menuliskan solusinya dalam bentuk separasi variabel

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)Z(z)e^{im\varphi} \quad (146)$$

dengan  $m$  sebuah konstanta. Misalkan solusi dari fungsi  $Z$  diberikan oleh:

$$Z(z) = e^{lz} + e^{-lz} \quad (147)$$

maka diperoleh untuk fungsi  $P(\rho)$  sebagai berikut:

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} + \left( l^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) P = 0 \quad (148)$$

Dengan mendefinisikan transformasi  $w = l\rho$ , maka persamaan (148) berubah bentuknya menjadi:

$$\frac{d^2 P}{dw^2} + \frac{1}{w} \frac{dP}{dw} + \left( 1 - \frac{m^2}{w^2} \right) P = 0 \quad (149)$$

atau

$$w^2 \frac{d^2 P}{dw^2} + w \frac{dP}{dw} + (w^2 - m^2) P = 0 \quad (150)$$

yang tidak lain adalah PDB Bessel.

Dari hasil yang diperoleh dalam memecahkan persamaan Laplace (136), terlihat bahwa dua buah PDB yang ditinjau dalam bab ini, yakni Legendre dan Bessel, masing-masing dapat muncul jika kita meninjau kasus dengan simetri tertentu. Seperti yang telah dibahas, solusi keduanya hanya dapat diperoleh jika kita memecahkannya dengan metode Frobenius. Kemunculan kedua persamaan diferensial tersebut dapat dijumpai antara lain dalam persoalan yang menyangkut fenomena listrik-magnet maupun gelombang.

Pada dasarnya, masih banyak lagi persamaan diferensial biasa yang solusi dapat dicari melalui metode Frobenius tersebut. Diantaranya adalah PDB Hermite dan Laguerre, yang kemunculannya dalam Fisika dapat dijumpai pada pembahasan mengenai teori kuantum.

## BAB 14

### ANALISIS KOMPLEKS

#### 1. Pendahuluan

Pada Bab 2, telah secara singkat dibahas mengenai definisi fungsi kompleks, yang merupakan fungsi dari variabel kompleks. Misalkan  $f(z)$  adalah sebuah fungsi kompleks dengan  $z = x + iy$  merupakan variabel kompleks yang dimaksud, dengan variabel  $x$  dan  $y$  riil, maka fungsi tersebut dapat dipisahkan atas bagian riil dan imajiner-nya sebagai berikut:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1)$$

dengan  $u(x, y)$  dan  $v(x, y)$  merupakan fungsi-fungsi riil dalam bidang kompleks  $(x, y)$ . Berbeda dengan fungsi-fungsi riil dengan dua variabel, fungsi kompleks tidak dapat direpresentasikan dalam bentuk grafik.

Bab ini memfokuskan diri pada pembahasan mengenai diferensiasi dan integrasi yang terkait dengan fungsi-fungsi kompleks tersebut beserta sifat-sifatnya. Dibandingkan dengan diferensiasi maupun integrasi terhadap fungsi-fungsi riil, untuk fungsi-fungsi kompleks jelas memiliki tingkat kerumitan yang lebih tinggi, oleh karena itu apa yang disajikan dalam pembahasan selanjutnya lebih ditekankan pada hal-hal mendasar yang relatif sederhana.

#### 2. Fungsi Kompleks Analitik

Tinjau kembali fungsi kompleks (1). Untuk membuktikan bahwa setiap fungsi kompleks dapat dituliskan dalam bentuk tersebut kita ambil sebagai contoh fungsi

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} \quad (2)$$

yang dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y \end{aligned} \quad (3)$$

Jelas bahwa dibandingkan dengan persamaan (1) diperoleh:

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y \quad (4)$$

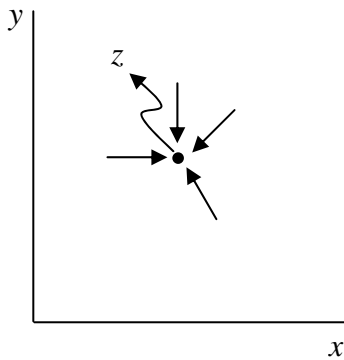
*Contoh 2.1.* Tentukan  $u$  dan  $v$  untuk  $f(z) = |z|$ . Karena  $|z| = \sqrt{zz^*}$ , maka  $|z| = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Dengan demikian  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$  dan  $v = 0$ . Perhatikan bahwa  $|z|$  tidak lain merupakan jari-jari sebuah lingkaran, sehingga kurva yang dibentuk oleh fungsi tersebut dalam bidang  $(x, y)$  adalah sebuah lingkaran pula.

Berdasarkan uraian fungsi kompleks dalam bentuk persamaan (1), dapat dengan mudah kita duga bahwa suatu fungsi kompleks adalah analitik, dalam artian kontinu dan memiliki turunan di bidang kompleks terkait, jika turunan-turunan parsial  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$  dan  $\partial v/\partial x$ ,  $\partial v/\partial y$  terdefinisi. Sebagaimana halnya untuk fungsi riil, fungsi kompleks dikatakan analitik di titik  $z$  jika memiliki turunan:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \quad (5)$$

yang berharga tunggal untuk setiap  $z$ . Selanjutnya definisi turunan pada ruas kanan persamaan (5) secara eksplisit diberikan oleh:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \quad (6)$$



Gambar 1

Seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1, turunan di titik tersebut dapat didekati dari berbagai macam arah. Misalkan untuk seluruh arah turunan tersebut analitik, maka hal tersebut juga berlaku untuk turunan yang dimaksud didekati dari arah sejajar sumbu  $x$  dimana  $\Delta y = 0$ . Pada kondisi ini, ruas kanan persamaan (6) menjadi tereduksi dan dengan mengacu pada persamaan (1), diperoleh:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

Di pihak lain, jika titik tersebut dari arah yang sejajar sumbu  $y$  diperoleh:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{i\Delta y} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8)$$

Jelas, agar kedua limit tersebut memiliki harga yang sama, maka kondisi yang harus dipenuhi adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (9a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (9b)$$

Kondisi yang diberikan pada persamaan (9) dinamakan sebagai kondisi Cauchy-Riemann. Mengingat turunan pada titik tersebut berharga tunggal maka jelas bahwa secara umum:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (10)$$

Cara lain yang lebih umum untuk membuktikan hal di atas adalah sebagai berikut; tinjau turunan total fungsi  $f(z)$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (11)$$

Selanjutnya diferensiasi parsial terhadap  $x$  dan  $y$  menghasilkan:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \frac{df}{dz} \quad (12a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dy} = i \frac{df}{dz} \quad (12b)$$

dimana  $dz/dx = 1$  dan  $dz/dy = i$ . Ingat, karena  $f$  adalah fungsi dari satu variabel, yakni  $z$ , maka berlaku  $\partial f / \partial z = df / dz$ . Dengan demikian dari persamaan (12) diperoleh:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad (13)$$

yang tidak lain adalah persamaan (10) dan mengimplikasikan kondisi Cauchy-Riemann (9).

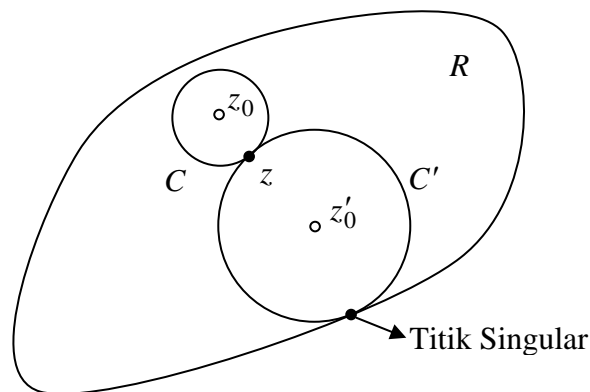
Sebelum melanjutkan pembahasana, berikut adalah beberapa definisi yang perlu dipahami: Sebuah titik  $z$  di dalam bidang kompleks dikatakan sebagai titik regular bagi fungsi  $f(z)$  jika fungsi tersebut analitik padanya, dan dikatakan sebagai titik singular jika tidak analitik. Titik singular tersebut dinamakan titik singular terisolasi jika  $f(z)$  analitik dalam suatu lingkaran kecil di sekitar titik tersebut.

Terkait dengan karakteristik dan daerah definisi bagi fungsi kompleks  $f(z)$ , berikut adalah beberapa teorema dasar yang berguna bagi diskusi selanjutnya:

*Teorema I.* Jika di suatu daerah tertutup pada bidang kompleks fungsi-fungsi  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ , dan turunan-turunan parsialnya terhadap  $x$  dan  $y$  kontinu dan memenuhi kondisi Cauchy-Riemann, maka  $f(z)$  analitik di setiap titik di dalam daerah tersebut.

*Teorema II.* Jika  $f(z)$  analitik di suatu daerah, maka ia memiliki turunan untuk semua orde di titik yang berada pada daerah tersebut, sehingga dapat diuraikan dalam deret Taylor disekitar sebarang titik  $z_0$  yang berada dalam daerah tersebut. Deret tersebut konvergen disekitar  $z_0$  yang limitnya mendekati titik singular.

Ilustrasi dari pernyataan Teorema II di atas diberikan oleh Gambar 2. Misalkan dalam daerah  $R$  sebuah fungsi  $f(z)$  analitik dan terdapat satu titik singular di batas daerah tersebut. Tinjau suatu titik  $z$  di  $R$  dan dua titik  $z_0$  dan  $z'_0$  yang masing-masing terkait dengan kurva lingkaran  $C$  dan  $C'$  yang berjari-jari  $|z - z_0|$  dan  $|z - z'_0|$ . Terlihat dalam ilustrasi tersebut terlihat bahwa pada kurva  $C'$ , termasuk didalamnya adalah titik singular, sehingga titik  $z'_0$  tidak dapat digunakan sebagai acuan bagi uraian Taylor terhadap  $f(z)$ . Sebaliknya titik  $z_0$  dapat digunakan karena tidak ada singularitas padanya.



Gambar 2

**Teorema III.** Jika  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  analitik di suatu daerah, maka  $u$  dan  $v$  memenuhi persamaan Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (14a)$$

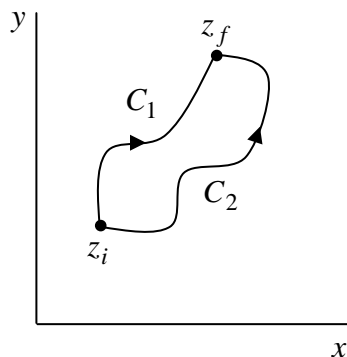
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (14b)$$

Untuk membuktikan Teorema III di atas, tinjau kondisi Cauchy-Riemann (9). Dengan melakukan diferensiasi sekali lagi terhadap  $u$  atau  $v$  untuk masing-masing variabel teorema tersebut dapat dengan mudah dibuktikan.

*Contoh 2.2.* Tinjau  $f(z) = e^z$ . Buktikan bahwa Teorema III berlaku. Telah diketahui bahwa untuk fungsi tersebut terkait dengan  $u = e^x \cos y$  dan  $v = e^x \sin y$ . Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa:  $\partial^2 u / \partial x^2 = e^x \cos y$  dan  $\partial^2 u / \partial y^2 = -e^x \cos y$ . Sehingga dengan demikian persamaan Laplace (14a) terpenuhi. Melalui cara yang sama dapat diperlihatkan pula bahwa persamaan (14b) untuk  $v$  juga berlaku.

### 3. Integral Kontur

Berbeda dengan definisi integral untuk fungsi riil yang batas-batasnya merupakan bilangan riil, dimana keduanya berada dalam satu garis bilangan, maka untuk integrasi fungsi kompleks batas-batas tersebut berada dalam bidang kompleks yang cara menghubungkannya ada tak-berhingga buah, sebagaimana diilustrasikan oleh Gambar 3.



Gambar 3

Secara naif dapat diduga bahwa kontur lintasan integrasi yang berbeda secara umum membuat integral fungsi  $f(z)$  yang analitik pada lintasan tersebut berbeda pula. Untuk membuktikannya tinjau bentuk integral tertutup berikut

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (u + iv)(dx + iy) \\ &= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) \end{aligned} \quad (16)$$



dimana  $C$  merupakan kontur sebarang lintasan tertutup dengan  $z_i = z_f$ . Selanjutnya dengan menggunakan Teorema Green pada bidang yang telah dibahas dalam Bab 6 Pasal 6, tinjau bagian riil ruas kanan baris kedua persamaan (16):

$$\oint_C (u dx - v dy) = \iint_{\text{Luas } C} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy \quad (17)$$

Berdasarkan kondisi Cauchy-Riemann (9) dapat dengan mudah dibuktikan bahwa ruas kanan integral (17) berharga nol. Melalui cara yang persis sama dapat dibuktikan pula bahwa bagian imajiner ruas kanan baris kedua persamaan (16) juga memenuhi kondisi:

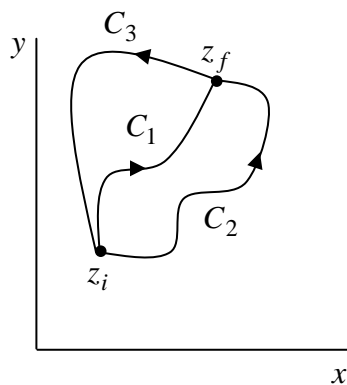
$$\oint_C (v dx + u dy) = 0 \quad (18)$$

Sehingga dengan demikian berlaku teorema berikut:

*Teorema IV.* Misalkan  $C$  adalah lintasan dengan kontur tertutup yang tidak saling berpotongan dan misalkan  $f(z)$  analitik pada dan didalamnya, maka integrasi berikut berlaku:

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (19)$$

Teorema IV di atas dinamakan sebagai Teorema Cauchy-Goursat. Catat bahwa arah integrasi pada kontur yang terkait adalah searah dengan jarum jam.



Gambar 4

Sekarang kita tinjau kontur lintasan yang diilustrasikan oleh Gambar 4, dimana  $C_1 + C_3$  dan  $C_2 + C_3$  adalah lintasan-lintasan tertutup.

Berdasarkan Teorema Cauchy-Goursat (19):

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz = 0 \quad (20a)$$

$$\int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz = 0 \quad (20b)$$

Jelas persamaan (20) mengimplikasikan bahwa:

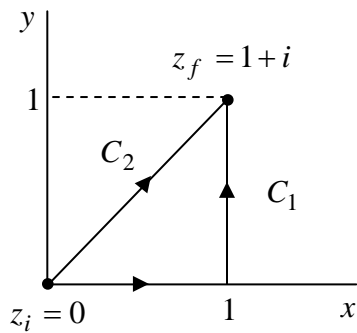
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \quad (21)$$

Sehingga dengan demikian integral fungsi tersebut tidak bergantung pada lintasan yang diambil. Secara khusus integral dalam bidang kompleks yang terdefinisi pada suatu lintasan dinamakan sebagai “Integral Kontur”, yang mirip dengan integral lintas dalam Bab 6 mengenai analisis vektor.

*Contoh 2.3.* Tinjau integral  $\int_0^{1+i} z dz$  dengan mengambil lintasan pertama  $C_1$  adalah

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 1+i$  dan lintasan kedua  $C_2$  adalah garis miring  $0 \rightarrow 1+i$ . Tuliskan bentuk inetgral yang dimaksud dalam bentuk berikut:

$$\int_C (x+iy)(dx+idy) = \int_C (x dx - y dy) + i(y dx + x dy) \quad (i)$$



Gambar 5

Perhatikan bahwa batas-batas untuk  $x$  dan  $y$  adalah riil. Selanjutnya tinjau untuk lintasan  $C_1$  yang terbagi atas  $0 \rightarrow 1$  dan  $1 \rightarrow 1+i$ . Evaluasi integral (i) untuk lintasan  $0 \rightarrow 1$  dengan mengingat untuk lintasan tersebut tersebut  $dy = 0$  dan  $y = 0$  diperoleh:

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad (iii)$$

Sedangkan untuk lintasan  $1 \rightarrow 1+i$ , sebagaimana terlihat pada Gambar 5,  $dx = 0$ ,  $x = 1$ , dan batas  $y$  adalah  $y = 0$  sampai 1, sehingga:

$$\int_0^1 (-y+i) dy = \left( -\frac{1}{2} y^2 + iy \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + i \quad (iv)$$

Hasil akhir integrasi adalah jumlah dari integrasi untuk lintasan  $0 \rightarrow 1$  dan  $1 \rightarrow 1+i$ :

$$\int_0^{1+i} z dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i = i \quad (v)$$

Berdasarkan Gambar 5, untuk lintasan  $C_2$ , hubungan antara  $y$  dan  $x$  diberikan oleh  $y = x$ , dengan  $dy = dx$  sehingga integral terkait yang harus diselesaikan adalah:

$$\int_{C_2} (x dx - y dy) + i(y dx + x dy) = i \int_0^1 2x dx = ix^2 \Big|_0^1 = i \quad (\text{vi})$$

sama dengan hasil integrasi untuk lintasan  $C_1$ . Terbukti bahwa pemilihan lintasan tidak mempengaruhi hasil akhir integrasi. Berdasarkan hal ini, integrasi langsung integral

$\int_0^{1+i} z dz$  juga memberikan hasil yang sama:

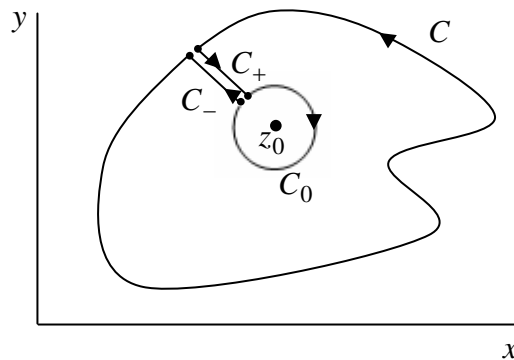
$$\int_0^{1+i} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{2} (1+i)^2 = i \quad (\text{vii})$$

#### 4. Integral Cauchy

Pada perumusan Teorema Cauchy-Goursat (19) pada daerah yang ditutupi oleh kontur  $C$  fungsi  $f(z)$  bersifat analitik pada batas dan didalamnya. Sekarang tinjau bentuk integral berikut:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (22)$$

dengan  $f(z)$  analitik pada dan di dalam  $C$  serta  $z_0 \in C$ . Jelas bahwa fungsi  $f(z)/(z - z_0)$  memiliki singularitas pada daerah tersebut. Untuk memecahkan bentuk integral semacam itu, tinjau bentuk kontur yang diberikan oleh Gambar 6.



Gambar 6

Kontur pada Gambar 6 terdiri atas gabungan lintasan-lintasan  $C + C_+ + C_- + C_0$ , dimana  $C_+$  dan  $C_-$  adalah lintasan yang saling berlawanan, sedangkan  $C_0$  berbentuk lingkaran terputus dengan jari-jari  $r$  dengan arah putaran searah jarum jam, sehingga  $z$  pada lingkaran tersebut dapat dituliskan sebagai

$$z = z_0 + re^{i\varphi} \quad (23)$$

dengan

$$\Delta \leq \varphi \leq 2\pi - \Delta \quad (24)$$

Berdasarkan pemilihan kontur tersebut jelas bahwa:

$$\oint_{C+C_++C_-+C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0 \quad (25)$$

karena melalui pemilihan tersebut  $z_0$  berada di luar kontur. Selanjutnya, integral (25) dapat diuraikan menjadi:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{C_+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{C_-} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0 \quad (26)$$

Berdasarkan penulisan  $z$  dalam bentuk polar (23), inetgral ke empat pada ruas kiri persamaan (26) dapat dituliskan menjadi:

$$i \int_{C_0} \frac{f(z_0 + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} re^{i\varphi} d\varphi = i \int_{C_0} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi \quad (27)$$

Jika parameter  $\Delta$  pada rentang  $\varphi$  (24) diambil  $\Delta \rightarrow 0$ , maka konsekuensinya, dua lintasan yang saling berlawanan  $C_+$  dan  $C_-$  menjadi berimpit dan integrasi keduanya menjadi:

$$\int_{C_+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{C_-} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0 \quad (28)$$

Sebagai konsekuensinya:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = -i \int_{C_0} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi = i \int_{C_0'} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi \quad (29)$$

Perhatikan bahwa tanda negatif pada ruas kanan persamaan (29) mengakibatkan kontur berubah arah dari searah jarum jam menjadi berlawanan arah jarum jam, sama dengan ruas kiri, yang dilambangkan oleh perubahan simbol lintasan dari  $C_0 \rightarrow C'_0$ . Di pihak lain, jika diambil  $r \rightarrow 0$ , maka  $f(z) \rightarrow f(z_0)$ , sehingga persamaan (29) berubah menjadi:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2i\pi f(z_0) \quad (30)$$

Perlu ditekankan bahwa pada limit  $\Delta \rightarrow 0$  dan  $r \rightarrow 0$ , lintasan  $C$  menjadi tertutup dan lintasan lainnya dapat dikatakan hilang, sehingga ruas paling kiri integral (29) menjadi integral tertutup.

*Teorema V.* Misalkan  $f(z)$  analitik pada dan di dalam kontur tertutup  $C$ , maka nilai  $f(z_0)$  dimana  $z_0$  berada didalamnya diberikan oleh:

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (31)$$

Integral pada ruas kanan persamaan (31) dinamakan sebagai Integral Cauchy. Perhatikan bahwa ketika mengevaluasi integral tersebut yang perlu diketahui adalah nilai fungsi  $f$  pada lintasan tertutup  $C$  dan sebagai hasilnya diperoleh nilai fungsi tersebut pada titik yang bukan berada pada lintasan tersebut, tetapi di dalam daerah yang dilingkupinya.

*Contoh 2.4.* Misalkan  $f(z) = (z+i)^2$ , tentukan  $f(1)$ . Ambil sebagai kontur tertutup lingkaran berjari-jari 1, yang dalam koordinat polar dapat dituliskan sebagai  $z = R e^{i\varphi}$  dan  $dz = iR e^{i\varphi} d\varphi$ , dengan  $R = 1$ . Dapat dibuktikan bahwa titik  $z = 0$  berada didalamnya dan  $f(z)$  analitik pada daerah tersebut. Kemudian nyatakan dalam representasi Euler  $i = e^{i\pi/2}$ , sehingga integral Cauchy (31) menghasilkan (buktikan!):

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{(R e^{i\varphi} + e^{i\pi/2})^2}{R e^{i\varphi}} iR e^{i\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{i\varphi} + e^{i\pi/2})^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi} \left( 2e^{i\varphi} - \frac{i}{2} e^{2i\varphi} - \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (-2\pi) = -1 \end{aligned}$$

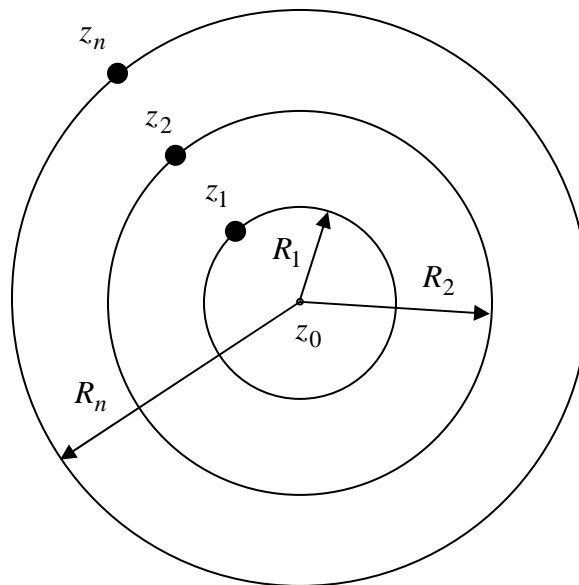
Hasil yang sama dapat diperoleh dengan jalan mensubstitusikan langsung  $z = 0$  pada fungsi yang ditinjau:  $f(0) = i^2 = -1$ .

## 5. Deret Laurent

Tinjau kembali fungsi kompleks  $f(z)$ . Mirip dengan uraian Taylor untuk fungsi riil, terhadap fungsi kompleks tersebut dapat pula dilakukan uraian semacamnya dalam bentuk sebagai berikut:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z - z_0)^n} \quad (32)$$

Deret (32) dinamakan sebagai deret Laurent dan deret dengan koefisien  $d_n$  dinamakan sebagai bagian utama deret tersebut. Jelas terlihat bahwa analitik atau tidaknya  $f(z)$  di  $z = z_0$  ditentukan oleh kehadiran koefisien  $d_n$ . Sedangkan syarat bagi keberadaan deret Laurent menghendaki konvergensi dari deret yang bersangkutan dalam suatu rentang modulus  $|z - z_0|$ . Misalkan  $f(z)$  memiliki beberapa  $n$  – buah titik singular  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , dimana untuk masing-masing titik singular terkait dengan sebuah lingkaran berjari-jari  $R_n = |z_n|$ , sebagaimana yang diilustrasikan dalam Gambar 7. Maka dalam rentang antar lingkaran terdekat memiliki deret Laurent yang berbeda.



Gambar 7

Jika koefisien  $d_n$  untuk semua  $n$ , maka jelas fungsi  $f$  analitik di  $z = z_0$ . Jika terdapat sejumlah  $n$  buah suku dengan  $d_n \neq 0$ , maka dikatakan fungsi tersebut memiliki kutub berorde  $n$  dan jika hanya ada satu buah kutub yakni  $n = 1$ ,  $f$  dikatakan memiliki kutub sederhana dan koefisien  $d_1$  dinamakan sebagai residu dari  $f$  di  $z = z_0$ . Selain itu, jika ada tak berhingga  $d_n \neq 0$ , maka  $f$  dikatakan memiliki singularitas esensial.

Untuk lebih memperjelas, tinjau sebagai contoh fungsi berikut:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \quad (33)$$

Terlihat bahwa fungsi tersebut memiliki tiga buah titik singular yakni di  $z = 0$ ,  $z = 1$  dan  $z = 2$ . Sehingga dengan demikian rentang deret Laurent yang perlu dicari adalah untuk (i)  $0 < |z| < 1$ , (ii)  $1 < |z| < 2$  dan (iii)  $|z| > 2$ .

Untuk rentang  $0 < |z| < 1$ , agar memudahkan ubah penulisan fungsi (33) menjadi:

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right] \quad (34)$$

Lalu lakukan uraian sebagaimana untuk uraian Taylor di sekitar  $z = 0$ , sehingga diperoleh:

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \frac{15}{16}z^3 \dots \right] = \frac{3}{4} + \frac{7}{8}z + \frac{15}{16}z^2 \dots + \frac{1}{2z} \quad (35)$$

Jelas dari bentuk deret Laurent (35) bahwa untuk rentang  $0 < |z| < 1$ ,  $f(z)$  memiliki kutub sederhana dengan residu  $d_1 = 1/2$ . Sebelum kita membahas untuk rentang  $1 < |z| < 2$ , ada baiknya ditinjau terlebih dahulu kasus rentang  $|z| > 2$ . Jika secara naif kita lakukan uraian sebagaimana untuk kasus  $0 < |z| < 1$ , maka deret yang dihasilkan akan divergen. Oleh karena itu, lakukan pengubahan berikut terhadap fungsi (33):

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left[ \frac{1}{1-2/z} - \frac{1}{1-1/z} \right] = \frac{1}{z^2} \left[ \frac{1}{1-2\tilde{z}} - \frac{1}{1-\tilde{z}} \right] \quad (36)$$

dengan  $\tilde{z} = 1/z$ . Selanjutnya kembali lakukan uraian untuk fungsi di dalam kurung siku pada ruas kanan persamaan (36) di sekitar  $\tilde{z} = 0$  seperti yang dilakukan untuk persamaan (35) dan diperoleh deret Laurent yang terkait sebagai berikut:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \frac{7}{z^5} + \frac{15}{z^6} + \dots \quad (38)$$

Dari deret tersebut segera terlihat bahwa untuk rentang  $|z| > 2$  pada  $z = 0$ ,  $f$  memiliki singularitas esensial. Selanjutnya, untuk rentang  $1 < |z| < 2$ , ubah terlebih dahulu bentuk fungsi (33) menjadi:

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-\tilde{z}} \right) \right] \quad (39)$$

dengan  $\tilde{z} = 1/z$ . Pemilihan ini dilakukan karena untuk rentang tersebut fungsi  $(z-2)^{-1}$  konvergen, sedangkan  $(z-1)^{-1}$  divergen, dan sebaliknya fungsi  $(1-1/z)^{-1}$  konvergen.

Kembali melalui cara yang sama diperoleh deret Laurent yang dimaksud:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left[ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 + \dots - \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}z - \frac{1}{16}z^2 + \dots - \frac{1}{2z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

yang juga memiliki singularitas esensial di  $z = 0$  dan residu  $d_1 = -1/2$ .

Secara umum, untuk memperoleh koefisien  $c_n$  dan  $d_n$  dari  $f(z)$  dapat diperoleh dengan mengevaluasi integral berikut:

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (41a)$$

$$d_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \quad (41b)$$

## 6. Teorema Residu

Perhatikan kembali integral Cauchy (31) yang dtuliskan dalam bentuk berikut:

$$\oint_C F(z) dz = 2i\pi f(z_0) \quad (42)$$

dengan  $F(z)$  merupakan fungsi yang didalamnya mengandung singularitas tunggal di titik  $z = z_0$  yang dapat berupa kutub sederhana atau singularitas esensial. Secara umum jika fungsi  $F$  tersebut memiliki kutub sederhana maka ia dapat diuraikan menjadi deret Laurent berikut:



$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{d_1}{z - z_0} \quad (43)$$

dan

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z - z_0)^n} \quad (44)$$

jika memiliki singularitas esensial. Substitusikan uraian (43) ke dalam integral (42) diperoleh:

$$\oint_C F(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\oint_C c_n (z - z_0)^n dz}_{=0} + \oint_C \frac{d_1}{z - z_0} dz = 2i\pi f(z_0) \quad (45)$$

Perhatikan bahwa integral pertama pada ruas tengah persamaan (45) nol berdasarkan Teorema Cauchy-Goursat (19), sehingga:

$$d_1 \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2i\pi f(z_0) \quad (46)$$

Kemudian kemudian kita evaluasi integral ruas kiri pada persamaan (46) di atas dengan mengambil kontur  $C$  dengan bentuk lingkaran berpusat di  $z_0$  dengan  $z = z_0 + R e^{i\varphi}$  dan  $dz = iR e^{i\varphi} d\varphi$ , sehingga:

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R e^{i\varphi}} iR e^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2i\pi \quad (47)$$

sehingga:

$$d_1 = f(z_0) \quad (48)$$

Jelas terlihat bahwa  $f(z_0)$  tidak lain adalah residu dari uraian Laurent terkait.

Sekarang tinjau untuk uraian Laurent dengan singularitas esensial. Melalui cara yang sama diperoleh:

$$\oint_C F(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C \frac{d_n}{(z - z_0)^n} dz = 2i\pi f(z_0) \quad (49)$$

Selanjutnya uraikan integral pada ruas tengah sebagai berikut:

$$d_1 \oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz + \sum_{n=2}^{\infty} \oint_C \frac{d_n}{(z - z_0)^n} dz = 2i\pi f(z_0) \quad (50)$$

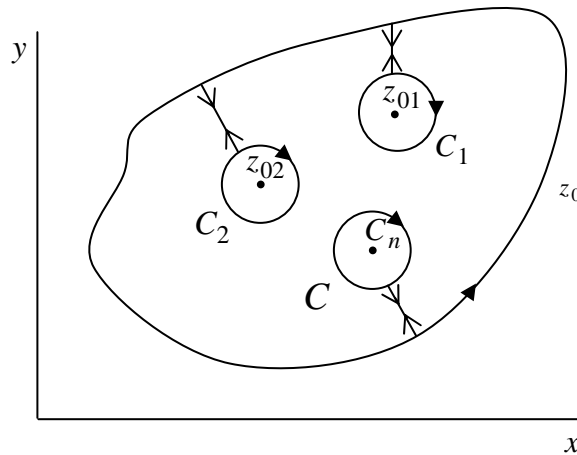
dimana integral ruas kiri persamaan (50) telah diperoleh sebelumnya. Sama dengan cara mengevaluasi integral (47) diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n \oint_C \frac{1}{R^n e^{in\varphi}} iR e^{i\varphi} d\varphi = \sum_{n=2}^{\infty} id_n \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^{n-1} e^{i(n-1)\varphi}} d\varphi \quad (51)$$

Selanjutnya tuliskan kembali integral ruas kanan persamaan (51) dalam bentuk berikut:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{id_n}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\varphi} d\varphi = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{id_n}{R^{n-1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos[(n-1)\varphi] - i \sin[(n-1)\varphi] d\varphi}_{=0} = 0 \quad (52)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh kembali untuk kasus dengan singularitas esensial  $F(z_0) = d_1$ . Dengan cara yang serupa diperoleh pula hasil yang sama untuk kasus dengan kutub berorde  $n$ .



Gambar 8

Dari sini jelas, khusus untuk kasus dengan kutub sederhana, selain dengan menguraikannya melalui uraian Laurent, salah satu cara untuk memperoleh residu yang dimaksud dapat diperoleh melalui hubungan:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)F(z) = f(z_0) \quad (53)$$

Misalkan  $F(z)$  dapat dinyatakan sebagai:

$$F(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad (54)$$

dan  $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$ , maka residu dapat diperoleh dengan menggunakan aturan L'Hôpital:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h'(z)} = f(z_0) \quad (55)$$

Melalui cara yang sama, dapat dilakukan perluasan ke kasus dimana dalam kontur yang ditinjau fungsi  $F(z)$  memiliki  $n$  – buah singularitas. Untuk itu tinjau Gambar 8, yang mirip dengan Gambar 6, dengan  $n$  – buah kutub yang masing-masing diisolasi oleh lingkaran  $C_n$ . Seperti halnya ketika merumuskan integral Cauchy (31), untuk kasus ini didapatkan bahwa:

$$\oint_C F(z) dz = 2i\pi [f(z_{01}) + f(z_{02}) + \dots + f(z_{0n})] \quad (56)$$

dimana  $f(z_{0n})$  adalah residu dari deret Laurent yang terkait dengan titik singular  $z_{0n}$ . Pernyataan bahwa nilai integral kontur untuk fungsi  $F(z)$ , dimana dalam kontur tersebut terdapat sejumlah singularitas, sama dengan  $2i\pi$  dikalikan dengan jumlah residu dinamakan Teorema Residu. Jika semua titik singular tersebut merupakan kutub sederhana, maka residunya dapat dicari melalui hubungan (53)

## 7. Contoh Penerapan dalam Fisika

Di dalam memecahkan problem-problem Fisika, kadang kala kita dihadapkan dengan bentuk-bentuk integral yang tidak dapat dipecahkan melalui teknik-teknik baku yang sudah umum dikenal. Perumusan integral kontur baik dalam bentuk integral (19) dan (30) maupun teorema residu (56), sering kali dapat digunakan untuk memecahkan integral-integral tersebut.

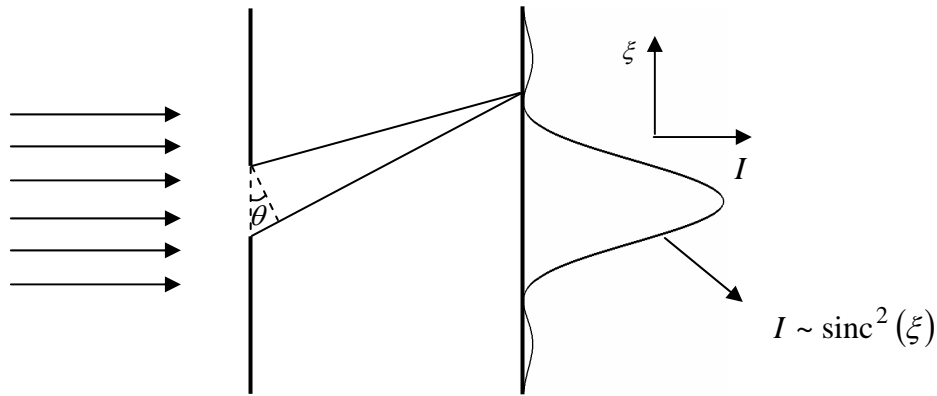
Salah satu bentuk fungsi yang kerap dijumpai seperti dalam spektroskopi infra merah atau pun persoalan difraksi Fraunhofer adalah fungsi kardinal sinus (*sinus cardinal*) atau “sinc” yang secara sederhana dituliskan sebagai berikut:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (57)$$

Fungsi tersebut, melalui aturan L’Hôpital memiliki limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (58)$$

Dalam persoalan difraksi Fraunhofer misalnya, fungsi tersebut muncul berkaitan dengan pola intensitas gelombang cahaya pada layar akibat kehadiran bukaan optik berbentuk celah, sebagaimana yang diilustrasikan pada Gambar 9.



Gambar 9

Total radiasi yang terdifraksi dapat dihitung dengan memecahkan integral berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi \tag{59}$$

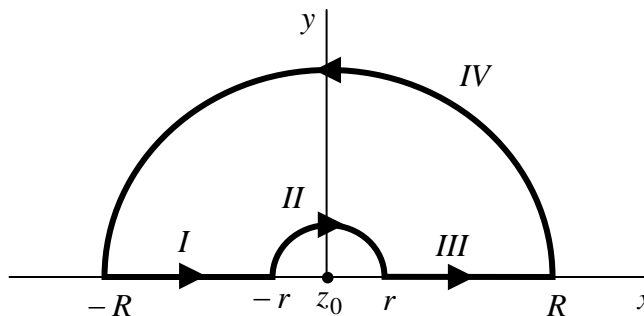
dengan  $\xi$  adalah variabel posisi dan  $I$  intensitas. Melalui teknik integrasi perbagian, yakni dengan mengambil  $u = \sin^2 \xi$  dan  $dv = 1/\xi^2$ , integral (59) dapat diubah menjadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi = \underbrace{-\frac{\sin^2 \xi}{\xi}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\xi}{\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\xi}{\xi} d\xi \tag{60}$$

Ruas kanan persamaan (60) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\xi}{\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{61}$$

dengan  $x = 2\xi$ ,



Gambar 10

Untuk memecahkannya ruas kanan integral (61), kita dapat lakukan dengan meninjau integral kontur berikut:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (62)$$

dengan kontur  $C$  yang dipilih diberikan pada Gambar 10. Kontur tersebut dipilih agar titik singularitas di  $z = z_0 = 0$  tidak berada dalam daerah yang dilingkupinya, sehingga integral (62) berlaku.

Berdasarkan pola kontur yang dipilih tersebut, maka integral (62) dapat diuraikan menjadi beberapa bagian, yang terkait dengan lintasan-lintasan pada Gambar 10, sebagai berikut:

$$\underbrace{\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx}_I + \underbrace{\int_{\pi}^0 \frac{e^{i r \exp(i\varphi)}}{r e^{i\varphi}} i r e^{i\varphi} d\varphi}_II + \underbrace{\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx}_III + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{e^{i R \exp(i\varphi)}}{R e^{i\varphi}} i R e^{i\varphi} d\varphi}_IV = 0 \quad (63)$$

Selanjutnya tinjau integral yang terkait dengan lintasan  $II$  dengan mengambil limit  $r \rightarrow 0$  diperoleh:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{e^{i r \exp(i\varphi)}}{r e^{i\varphi}} i r e^{i\varphi} d\varphi = \lim_{r \rightarrow 0} i \int_{\pi}^0 e^{i r \exp(i\varphi)} d\varphi = i \int_{\pi}^0 d\varphi = -i\pi \quad (64)$$

dan tinjau pula integral untuk lintasan  $IV$  dengan mengambil limit  $R \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{i R \exp(i\varphi)}}{R e^{i\varphi}} i R e^{i\varphi} d\varphi = \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^{\pi} e^{i R \exp(i\varphi)} d\varphi \quad (65)$$

dengan menuliskan  $R \exp(i\varphi) = R \cos \varphi + i R \sin \varphi$  diperoleh

$$\lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^{\pi} e^{i R \exp(i\varphi)} d\varphi = \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^{\pi} e^{i R \cos \varphi} e^{-R \sin \varphi} d\varphi = 0 \quad (66)$$

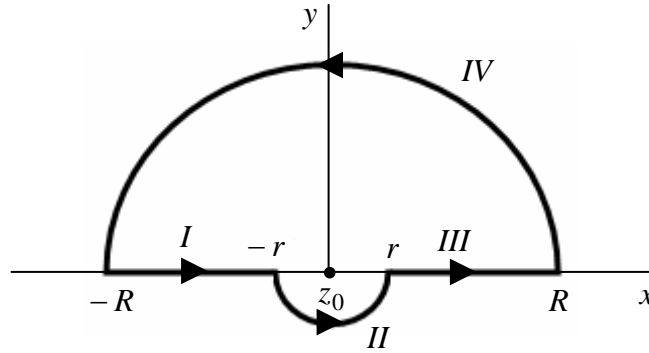
Sehingga dengan demikian untuk kedua limit,  $r \rightarrow 0$  dan  $R \rightarrow \infty$ , persamaan (63) menjadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi = 0 \quad (67)$$

Dengan mengambil bagian imajiner persamaan (67) diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad (68)$$

Perlu ditekankan di sini, bahwa pengambilan kontur  $C$  yang diberikan pada Gambar 10 bukanlah satu-satunya bentuk yang dapat diambil. Kita dapat pula mengambil kontur lain seperti yang diberikan dalam Gambar 11. Perhatikan, dalam integral kontur terkait bentuk integral yang dicari masing ditampung didalamnya.



Gambar 11

Berbeda dengan kontur sebelumnya, dalam kontur pada Gambar 11  $z_0$  berada di dalam daerah yang dilingkupinya, sehingga kita dapat menggunakan teorema residu:

$$\oint_C F(z) dz = 2i\pi f(z_0) \quad (69)$$

dengan  $F(z) = e^{iz}/z$  dan  $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow 0} zF(z) = 1$  karena  $z = 0$  adalah kutub sederhana.

Integral untuk masing-masing lintasan diberikan oleh:

$$\underbrace{\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx}_I + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i r \exp(i\varphi)}}{r e^{i\varphi}} i r e^{i\varphi} d\varphi}_II + \underbrace{\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx}_III + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{e^{i R \exp(i\varphi)}}{R e^{i\varphi}} i R e^{i\varphi} d\varphi}_IV = 2i\pi \quad (70)$$

Perhatikan bahwa berbeda dengan integral (63), integral untuk lintasan  $II$  memiliki batas dari  $\varphi = \pi$  sampai  $2\pi$ , dan melalui cara yang sama, untuk limit  $r \rightarrow 0$  dan  $R \rightarrow \infty$  diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + i\pi = 2i\pi \quad (71)$$

sehingga jelas persamaan (67) dan (68) dapat dihasilkan kembali.

Sekali lagi, sebagai catatan akhir, pemecahan bentuk integral-integral tertentu melalui menggunakan integral kontur membutuhkan tingkat kecermatan yang baik dalam memilih fungsi kompleks terkait dan bentuk konturnya sedemikian rupa sehingga bentuk integral yang dimaksud ditampung dalam pilihan tersebut. Ketepatan pemilihan akan memudahkan kita dalam melakukan evaluasi.

## BAB 15

### TRANSFORMASI INTEGRAL

#### 1. Pendahuluan

Pada bab ini dibahas konsep transformasi fungsi dari suatu variabel ke variabel lainnya dengan menggunakan operator integral. Misalkan  $f(u)$  merupakan fungsi dari variabel  $u$  yang ingin ditransformasikan menjadi fungsi  $F(s)$  dengan variabel  $s$ , maka transformasi integral yang dimaksud didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{T}[f(t)] \mapsto F(s) \quad (1)$$

dimana:

$$\mathbf{T}[f(t)] \equiv \int_{t_i}^{t_f} K(s,t)f(t)dt \quad (2)$$

dengan  $t_i$  dan  $t_f$  merupakan batas-batas integrasi dan  $K(s,t)$  dinamakan sebagai “fungsi kernel” bagi transformasi yang terkait.

Secara khusus jika bentuk fungsi kernel yang digunakan berbentuk:

$$K(s,t) \equiv K(s \pm t) \quad (3)$$

maka untuk tanda negatif pada argumen ruas kanan (16) transformasi integral tersebut dinamakan sebagai integral konvolusi dan integral korelasi untuk tanda positif.

Pada dasarnya, bentuk transformasi integral di atas dapat dipandang sebagai suatu cara untuk merepresentasikan fungsi ke dalam bentuk lain, tergantung dari fungsi kernel terkait, agar diperoleh bentuk yang secara matematis lebih mudah ditangani. Ada banyak macam transformasi integral dalam matematika seperti transformasi Laplace, Fourier, Weierstrass, Mellin dan lain sebagainya. Dalam Fisika, di antara semua transformasi tersebut, transformasi Laplace dan Fourier adalah yang seringkali dijumpai. Sebagai contoh, keduanya banyak digunakan dalam untuk memecahkan persamaan diferensial. Pada bab ini kita hanya akan meninjau kedua jenis transformasi tersebut.

#### 2. Transformasi Laplace

Fungsi kernel untuk transformasi Laplace didefinisikan sebagai berikut:

$$K(s,t) = e^{-st} \quad (4)$$



dengan batas integrasi  $t_i = 0$  dan  $t_f \rightarrow \infty$ , sehingga transformasi yang dimaksud adalah:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5)$$

dimana  $s > 0$ . Untuk memudahkan penulisan, diperkenalkan notasi berikut:

$$F = L\{f\} \quad (6)$$

yang menyatakan bahwa fungsi  $F$  merupakan transformasi Laplace fungsi  $f$ .

Sebagai contoh sederhana dari transformasi ini kita tinjau fungsi  $f(t) = t$ . Melalui integral per bagian diperoleh:

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t t e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{t}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} \int_0^t e^{-st} dt \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{t}{s} e^{-st} + \frac{1}{s^2} (1 - e^{-st}) \right] \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh:

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2} = F(s) \quad (8)$$

*Contoh 2.1.* Tentukan transformasi Laplace  $f(t) = \sin t$ . Kembali dengan menggunakan teknik integral per bagian diperoleh:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-st} \sin t dt &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \left[ -e^{-st} \sin t + \int_0^t e^{-st} \cos t dt \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2} \left[ -s e^{-st} \sin t - e^{-st} \cos t + 1 \right] - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2} \int_0^t e^{-st} \sin t dt \end{aligned} \quad (i)$$

Dengan melakukan sedikit manipulasi diperoleh:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 1}{s^2} \int_0^t e^{-st} \sin t dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2} \left[ -s e^{-st} \sin t - e^{-st} \cos t + 1 \right] \quad (ii)$$

atau

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-st} \sin t dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{-s e^{-st} \sin t - e^{-st} \cos t + 1}{s^2 + 1} \right] \quad (iii)$$

Sehingga diperoleh:

$$\int_0^t e^{-st} \sin t \, dt = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (\text{iv})$$

atau

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (\text{v})$$

Pada prinsipnya, melalui cara yang sama dengan di atas atau dengan teknik khusus lainnya dapat diperoleh transformasi Laplace dari sebuah fungsi. Berikut adalah beberapa contoh hasil transformasi tersebut:

$$L\{a\} = \frac{a}{s} \quad (9a)$$

$$L\{\sin at\} = \frac{1}{s^2 + a^2} \quad (9b)$$

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (9c)$$

$$L\{\sinh at\} = \frac{1}{s^2 - a^2} \quad (9d)$$

$$L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (9e)$$

$$L\left\{\frac{\text{sinc } at}{a}\right\} = \arctan \frac{a}{p} \quad (9f)$$

$$L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}, \quad s+a > 0 \quad (9g)$$

dimana  $a$  adalah konstanta. Untuk fungsi-fungsi yang lain dapat dilihat pada tabel yang tersedia di buku teks standar. Karena transformasi Laplace adalah transformasi linier, maka untuk  $f(t) = \sum_n f_n(t)$  berlaku:

$$L\{f\} = \sum_n F_n(s) \quad (10)$$

dengan  $F_n = L\{f_n\}$ .

*Contoh 2.2.* Tentukan transformasi Laplace  $f(t) = 1 - \cosh t$ . Berdasarkan linieritas transformasi Laplace diperoleh:

$$\begin{aligned} L\{1 - \cosh t\} &= L\{1\} + L\{-\cosh t\} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{-1}{s^3 - s} \end{aligned}$$

Salah satu hal yang penting untuk dipelajari adalah transformasi Laplace terhadap fungsi turunan  $\dot{y} = dy/dt$  :

$$L(\dot{y}) = \int_0^{\infty} e^{-st} \dot{y}(t) dt \quad (11)$$

Misalkan untuk integral per bagian  $u = e^{-st}$  dan  $dv = \dot{y} dt$ , sehingga  $du = -s e^{-st}$  dan  $v = y$ , diperoleh:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \dot{y} dt = e^{-st} y|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} y dt \quad (12)$$

Suku pertama pada ruas kanan persamaan (12) memberikan:

$$e^{-st} y|_0^{\infty} = -y(0) = -y_0 \quad (13)$$

dengan  $y(0) \equiv y_0$  adalah kondisi awal untuk  $y$ , sedangkan suku keduanya tidak lain adalah:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} y dt = L(y) = Y(s) \quad (14)$$

Sehingga dengan demikian diperoleh:

$$L(\dot{y}) = sY(s) - y_0 \quad (15)$$

Melalui cara yang sama diperoleh:

$$L(\ddot{y}) = s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 \quad (16)$$

Jelas berdasarkan transformasi Laplace (15) dan (16) serta sifat linieritas transformasi Laplace kita dapat mengaplikasikannya untuk memecahkan persamaan diferensial biasa (PDB).

Sebagai contoh, tinjau PDB berikut:

$$\ddot{y} + \dot{y} = e^t \quad (17)$$

Terapkan transformasi Laplace untuk PDB (17) tersebut dan berdasarkan persamaan (9g), (15) dan (16) diperoleh:

$$s^2 Y - s y_0 - \dot{y}_0 + s Y - y_0 = \frac{1}{s-1} \quad (18)$$

Misalkan  $y_0 = 1$  dan  $\dot{y}_0 = 0$ , maka:

$$s(s+1)Y - (s+1) = \frac{1}{s-1} \quad (19)$$

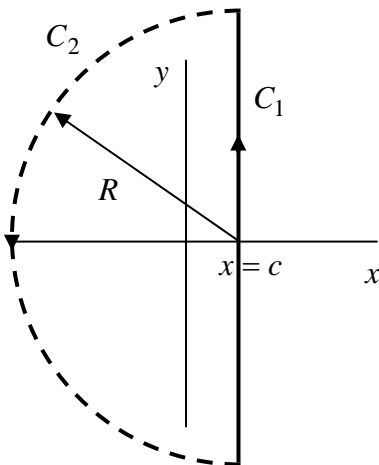
sehingga solusinya adalah:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 - 1} \quad (20)$$

Terlihat bahwa fungsi  $Y(s)$  pada persamaan (20) di atas, sesuai dengan transformasi Laplace pada persamaan (9c) untuk  $a = 1$ , sehingga dengan demikian solusi bagi PDB (17) diberikan oleh:

$$y(t) = \cosh t \quad (21)$$

Dari sini jelas bahwa transformasi Laplace dapat digunakan untuk memecahkan PDB. Tetapi perlu dicatat bahwa tidak semua PDB dapat dengan mudah diselesaikan melalui metode ini, mengingat untuk mencari transformasi balik bagi fungsi dalam domain  $s$  ke  $t$  tidak selalu mudah.



Gambar 1

Prosedur baku untuk mencari invers dari transformasi Laplace ialah dengan menggunakan formulasi integral Bromwich. Tanpa membahas penurunannya, misalkan  $F(s)$  adalah fungsi yang ingin dicari invers transformasi Laplace-nya, maka berdasarkan formulasi tersebut fungsi  $f(t)$  dapat dicari dengan memisalkan  $F(s) \rightarrow F(z)$  dimana  $z = x + iy$  dan selanjutnya melakukan evaluasi terhadap integral Bromwich berikut:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z) e^{zt} dz \quad (22)$$

untuk  $t > 0$ . Lintasan bagi integral Bromwich tersebut adalah suatu garis lurus  $C_1$  vertikal dengan panjang tak-hingga sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 1. Berdasarkan apa yang telah kita pelajari mengenai analisis kompleks pada Bab 14, kita

dapat meninjau suatu kontur tertutup dengan menambahkan suatu kurva  $C_2$  berbentuk setengah lingkaran dengan jari-jari  $R \rightarrow \infty$ . Selanjutnya dengan menguraikan integral terkait untuk masing-masing lintasan dan memanfaatkan teorema residu diperoleh:

$$\oint_{C_1+C_2} F(z)e^{zt} dz = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt} dz + \underbrace{\int_{C_2} F(z)e^{zt} dz}_{\rightarrow 0 \text{ untuk } R \rightarrow \infty} = 2i\pi \times \text{jumlah semua residu} \quad (23)$$

Dengan membandingkan persamaan (23) dengan (22) dapat disimpulkan bahwa:

$$f(t) = \text{jumlah semua residu dari } F(z)e^{zt} \quad (24)$$

Kembali perlu diingatkan bahwa selain dari formulasi integral Bromwich di atas, cara lain yang dapat ditempuh adalah dengan memanfaatkan tabel transformasi Laplace walaupun dibutuhkan kecermatan dalam melihat bentuk transformasi balikan yang dicari.

*Contoh 2.3.* Tentuk invers dari  $F(s) = s^{-2}$ . Untuk menentukannya tinjau fungsi kompleks berikut  $F(z) = z^{-2}$ , yang memiliki sebuah singularitas di  $z = 0$ . Deret Laurent untuk fungsi  $e^{zt}/z^2$  adalah:

$$\frac{e^{zt}}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} z + \dots \quad (i)$$

Terlihat bahwa residu dari deret tersebut adalah  $t$ , sehingga dengan demikian  $f(t)$  yang dimaksud adalah  $f(t) = t$ .

### 3. Transformasi Fourier

Sedikit berbeda dengan transformasi Laplace, tinjau untuk transformasi Fourier fungsi kernel berikut:

$$K(t, \omega) = e^{\pm i\omega t} \quad (25)$$

dengan  $t_i = -\infty$  dan  $t_f = \infty$  dan transformasi yang dimaksud diberikan oleh:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{\pm i\omega t} d\omega = F\{g\} \quad (26)$$

dimana  $\omega$  merupakan variabel riil dan ungkapan  $F\{g\}$  menotasikan transformasi Fourier. Berbeda dengan invers transformasi Laplace yang terkait dengan integral Bromwich (22), maka invers dari transformasi (26) diberikan oleh (tanpa pembuktian):

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\mp i\omega t} dt \quad (27)$$

dimana kedua fungsi  $f(t)$  dan  $F(s)$  memenuhi teorema Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (28)$$

Untuk kemudahan, selanjutnya kita akan menggunakan tanda positif untuk argumen fungsi eksponen pada transformasi Fourier (26) dan negatif untuk inversnya (27).

Misalkan kita ganti variabel boneka pada persamaan (27) dan menuliskannya kembali sebagai berikut:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \quad (29)$$

Selanjutnya sunstitusikan kembali ke persamaan (26):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds d\omega \quad (30)$$

Jelas agar konsistensi transformasi Fourier terjaga, maka kondisi (30) harus terpenuhi.

Perhatikan bahwa untuk invers transformai Fourier terdapat faktor  $1/2\pi$  pada kondisi konsistensi (30) yang diberikan yang mengakibatkan integral (26) dan (27) tidak simetri. Jika persamaan (30) diatur kembali penulisannya menjadi:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \right] d\omega \quad (31)$$

maka kita dapat mendefinisikan transformasi Fourier yang simetrik terhadap inversinya dengan mendefinisikan kembali ungkapan (26) dalam bentuk:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (32)$$

dan inversnya diberikan oleh:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (33)$$

Kembali pada transformasi Fourier (26). Terlihat bahwa fungsi kernel  $\exp(\pm i\omega t)$  tidak lain merupakan fungsi harmonik tunggal dengan  $\omega$  merupakan variabel frekuensi, sehingga dengan demikian dapat ditafsirkan bahwa fungsi  $f(t)$  pada persamaan (26) merupakan penjumlahan linier atas tak-hingga buah fungsi harmonik dengan rentang frekuensi sudut  $-\infty < \omega < \infty$  dimana  $g(\omega)$  merupakan amplitudonya. Jelas bahwa konsep transformasi Fourier dapat digunakan untuk melakukan analisis spektral dari suatu sinyal, yang secara umum tidak periodik. Sebagai contoh tinjau fungsi  $g(\omega)$  berikut:

$$g(\omega) = \begin{cases} 1 & -a/2 < \omega < a/2 \\ 0 & \omega^2 > a^2/4 \end{cases} \quad (34)$$

Berdasarkan persamaan (26), integral yang terkait dapat diuraikan menjadi:

$$\int_{-\infty}^{-a/2} 0 \cdot e^{i\omega t} d\omega + \int_{-a/2}^{a/2} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega + \int_{a/2}^{\infty} 0 \cdot e^{i\omega t} d\omega = \int_{-a/2}^{a/2} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (35)$$

Selanjutnya dengan mengevaluasi ruas kanan persamaan (31) diperoleh:

$$\int_{-a/2}^{a/2} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{it} e^{i\omega t} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{e^{iat/2} - e^{-at/2}}{it} = \frac{2 \sin(at/2)}{t} \quad (36)$$

Sehingga dengan demikian didapatkan:

$$f(t) = F\{g\} = \frac{2 \sin(at/2)}{t} = 4a \operatorname{sinc}(at/2) \quad (37)$$

Selanjutnya kita akan meninjau transformasi Fourier untuk fungsi yang memiliki sifat simetri khusus yakni fungsi genap (*even*)  $g_e(\omega)$  dan fungsi ganjil (*odd*)  $g_o(\omega)$  yang masing-masing memiliki sifat:

$$g_e(-\omega) = g_e(\omega) \quad (38a)$$

$$g_o(-\omega) = -g_o(\omega) \quad (38b)$$

Untuk fungsi genap  $g_e(\omega)$ , transformasi Fouriernya dapat dituliskan dengan mengubah fungsi eksponen dalam bentuk Eulerian sebagai berikut:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega) \cos \omega t d\omega + i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega) \sin \omega t d\omega}_{=0} \quad (39)$$

Integral kedua pada ruas kanan persamaan (39) menjadi nol karena fungsi  $\sin \omega t$  merupakan fungsi ganjil dengan sifat seperti (38b), sehingga:

$$f(t) = f_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega) \cos \omega t d\omega = 2 \int_0^{\infty} g_e(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (40)$$

Perhatikan, integral pada ruas kanan persamaan (40) adalah konsekuensi dari simetri yang dimiliki. Di pihak lain, invers dari transformasi (40) sesuai dengan persamaan (27) adalah:

$$g_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_e(t) \cos \omega t dt \quad (41)$$

Sehingga, serupa dengan persamaan (30), kondisi konsistensi terkaitnya adalah:

$$f_e(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_e(s) \cos \omega s \cdot \cos \omega t ds d\omega \quad (42)$$

Terlihat bahwa faktor didepan integral pada ruas kanan adalah  $2/\pi$ . Kembali dengan mengatur penulisannya dalam bentuk berikut:

$$f_e(t) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_e(s) \cos \omega s ds \right] \cos \omega t d\omega \quad (43)$$

Dari sini jelas bahwa untuk fungsi genap, kita dapat mendefinisikan transformasi Fourier kosinus dan inversnya sebagai berikut:

$$f_e(t) = \int_0^{\infty} g_e(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (44a)$$

$$g_e(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_e(t) \cos \omega t dt \quad (44b)$$

Melalui cara yang sama, untuk fungsi ganjil berlaku transformasi Fourier sinus berikut:

$$f_o(t) = \int_0^{\infty} g_o(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (45a)$$

$$g_o(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_o(t) \sin \omega t dt \quad (45b)$$



Dapat dengan mudah diperlihatkan bahwa untuk fungsi pada persamaan (37) dapat pula diperoleh dari transformasinya melalui persamaan (44a).

#### 4. Fungsi Delta Dirac

Pada pembahasan mengenai transformasi Fourier masih tersisa persoalan tentang kondisi konsistensi sebagaimana yang diberikan pada persamaan (30). Untuk itu kita tinjau kembali persamaan tersebut dengan menuliskannya dalam bentuk berikut:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \right] dt_0 \quad (46)$$

Perhatikan integral dalam kurung siku pada ruas kanan persamaan (46). Kita dapat mendefinisikan sebuah fungsi:

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \quad (47)$$

sehingga persamaan (46) menjadi:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \delta(t-t_0) dt_0 \quad (48)$$

Berdasarkan persamaan (47) jelas bahwa:

$$\delta(t-t_0) = 0, \text{ untuk } t \neq t_0 \quad (49)$$

dan  $\delta(t-s)$  dapat dikatakan tidak terdefinisi jika  $t = t_0$ . Jika  $f(t_0) = 1$ , maka persamaan (48) mengimplikasikan bahwa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt_0 = 1 \quad (50)$$

Secara spesifik fungsi dengan sifat yang memenuhi kondisi (48)-(50) dinamakan sebagai fungsi delta Dirac. Fungsi ini dinamakan sesuai dengan nama perumusny Paul A. M. Dirac dan kerap dijumpai dalam teori kuantum. Perlu ditekankan di sini bahwa prosedur di atas bukan untuk membuktikan secara ketat kehadiran fungsi  $\delta$ -Dirac, tetapi hanya untuk menunjukkan bahwa jika fungsi tersebut ada maka dengan mudah kondisi konsistensi bagi transformasi Fourier dapat ditunjukkan.

Berdasarkan fungsi tersebut kini teorema Parseval (28) dapat dibuktikan melalui cara berikut:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)g^*(\omega)d\omega &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t_0)e^{-i\omega t_0} dt_0 \right] d\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t_0) \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \right]}_{2\pi\delta(t-t_0)} dt_0 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t_0)\delta(t-t_0)dt_0 \right]}_{f^*(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt \quad \therefore
\end{aligned} \tag{51}$$

Kembali pada definisi fungsi delta Dirac (47) untuk  $t_0 = 0$ , jika dituliskan dalam bentuk:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{i\omega t} d\omega \tag{52}$$

maka sesuai dengan persamaan (26), fungsi tersebut dapat dipandang merupakan hasil transformasi Fourier untuk fungsi  $g(\omega) = 1/2\pi$ , dengan inversnya diberikan oleh:

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{i\omega t} dt}_{=1} \tag{53}$$

## 5. Integral Konvolusi

Sebagaimana telah disinggung pada bagian pendahuluan, misalkan fungsi kernel  $K$  didefinisikan dalam bentuk:

$$K(t, t_0) = g(t - t_0) \tag{54}$$

maka integral (2) yang dituliskan dalam bentuk:

$$\int_{t_i}^{t_f} g(t - t_0)f(t_0)dt_0 = g * f \tag{55}$$

dinamakan sebagai konvolusi dari  $g$  dan  $f$ . Sedangkan

$$\int_{t_i}^{t_f} f(t - t_0)g(t_0)dt_0 = f * g \tag{56}$$

Misalkan pada konvolusi (56) dilakukan transformasi variabel:

$$t - t_0 = \tau_0 \tag{57}$$

sehingga  $t_0 = t - \tau$  dan  $dt_0 = -d\tau$  maka bentuk tersebut akan bertransformasi menjadi:

$$\int_{t_i}^{t_f} f(t-t_0)g(t_0)dt_0 = -\int_{\tau_i}^{\tau_f} f(\tau_0)g(t-\tau_0)d\tau_0 = \int_{\tau_f}^{\tau_i} g(t-\tau_0)f(\tau_0)d\tau_0 = g * f \quad (58)$$

dengan batas integrasi untuk domain  $\tau$  pada  $t_0 = t_i$  adalah  $\tau_i = t - t_i$  sedangkan pada  $t_0 = t_f$  adalah  $\tau_f = t - t_f$  dimana  $\tau_f < \tau_i$ . Hubungan (58) menunjukkan bahwa operasi konvolusi bersifat komutatif:

$$f * g = g * f \quad (59)$$

Salah satu sifat yang penting dari operasi konvolusi, adalah mengenai perilakunya terhadap transformasi Laplace dan Fourier. Tinjau transformasi Laplace terhadap integral konvolusi berikut:

$$L(g * f) = \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t g(t-t_0)f(t_0)dt_0 dt \quad (60)$$

dengan batas bagi integral konvolusi adalah  $t_i = 0$  dan  $t_f = t$ . Seperti pada pembuktian sifat komutatif operasi konvolusi, kembali lakukan transformasi (57) sehingga ruas kanan persamaan (60) menjadi:

$$-\int_0^{\infty} e^{-s(t_0+\tau_0)} \int_{\tau}^0 g(\tau_0)f(t_0)dt_0 d\tau_0 \quad (61)$$

dimana  $\tau_i = \tau$  dan  $\tau_f = 0$ . Perhatikan persamaan (60), terlihat bahwa untuk integrasi terhadap  $t_0$  akan menghasilkan sebuah fungsi dari variabel  $t$  yang memiliki rentang  $0 < t < \infty$ , dengan demikian berdasarkan hubungan (57) jelas bahwa  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , sehingga integral (61) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-s\tau_0} g(\tau_0)d\tau_0}_{G(s)} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st_0} f(t_0)dt_0}_{F(s)} \quad (62)$$

Sehingga untuk persamaan (60) diperoleh:

$$L(g * f) = G(s)F(s) \quad (63)$$

yang menunjukkan bahwa dalam transformasi Laplace integral konvolusi merupakan perkalian biasa dari transformasi Laplace dari masing-masing fungsi.

Untuk transformasi Fourier tinjau perkalian dua buah fungsi  $g_1(\omega)g_2(\omega)$ :

$$\begin{aligned} g_0(\omega)g_1(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t_0)e^{-i\omega t_0} dt_0 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1)e^{-i\omega t_1} dt_1 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t_0)f_1(t_1)e^{-i\omega(t_0+t_1)} dt_0 dt_1 \end{aligned} \quad (64)$$

Selanjutnya misalkan  $t_1 = t - t_0$  dengan  $dt_1 = dt$ , sehingga baris kedua persamaan (64) berubah menjadi:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t_0)f_1(t-t_0)e^{-i\omega t} dt_0 dt \quad (65)$$

Kemudian dengan mangtur kembali integral (65) dalam bentuk berikut:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t_0)f_1(t-t_0) dt_0 \right] e^{-i\omega t} dt \quad (66)$$

Jelas bahwa integral di dalam siku kurung merupakan integral konvolusi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t_0)f_1(t-t_0) dt_0 = f_0 * f_1 \quad (67)$$

Sehingga (66) menjadi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} f_0 * f_1 e^{-i\omega t} dt = F\{f_0 * f_1\} \quad (68)$$

dimana  $t_i = -\infty$  dan  $t_f = \infty$ . Jelas, berdasarkan hubungan-hubungan di atas, diperoleh bahwa:

$$g_0(\omega)g_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} F\{f_0 * f_1\} \quad (69)$$

Melalui cara yang hampir sama, dapat diperoleh juga hubungan berikut:

$$f_0(t)f_1(t) = F\{g_0 * g_1\} \quad (70)$$

Dalam Fisika, penerapan integral konvolusi dapat dijumpai pada analisis sinyal, optik, akustik dan semua persoalan yang menyangkut sistem-sistem yang memiliki sifat dispersif, dimana respon dari sistem akibat stimulasi dari luar tidak terjadi secara bersamaan.

## REFERENSI

1. M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, John Wiley, 1983.
2. S. Hassani, *Mathematical Methods for Students of Physics and Related Fields*, Springer, 2000.
3. M. S. Spiegel. *Advanced Calculus*, McGraw Hill, 1981.
4. L. A. Pipes, L. R. Harvill, *Applied Mathematics for Engineers and Physicist*, McGraw Hill, 1984.
5. G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicist*, Academic Press, 1995.
6. Hans J. Wospakrik, Diktat Fisika Matematika, ITB, Tidak Diterbitkan.