Aplikasi Turunan

A. Menentukan kemiringan (gradien) garis singgung kurva.

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik T(x_1, y_1) adalah $y_s = (f'(x_1))(x - x_1) + y_1$

Atau $y_s - y_1 = m(x - x_1)$ dengan $m = f'(x_1)$

Contoh_a.1. Persamaan garis singgung kurva $y = -x^2 + 5x + 6$ di titik T(1, 10)!

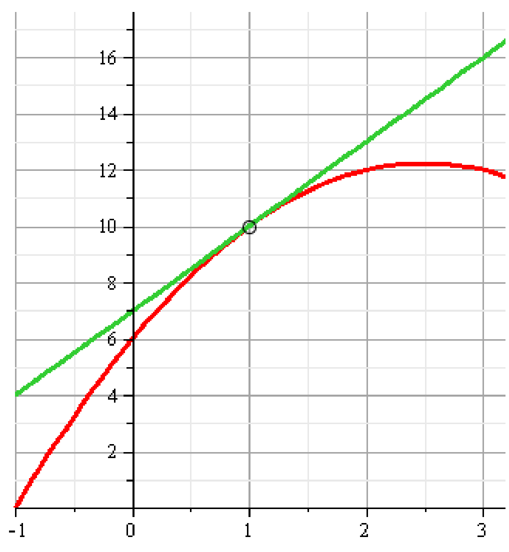
Penyelesaian:

§ Kemiringan garis singgung: $y' = -2x + 5$ dengan $x = 1, \rightarrow m = y' = -2(1) + 5 = 3$,didapatkan gradien: $m = 3$

§ Garis singgung: $y_s - 10 = 3(x - 1)$

Jadi persamaan garis singgungnya $y_s = 3x + 7$

Grafik:



B. Titik Stasioner

Jika f terdefinisi pada interval I dan $c \epsilon I$, maka titik stasioner dicapai ketika $f'(c) = 0$

Contoh_b1. Tentukan titik stasioner pada kurva $y = -x^2 + 5x + 6$

Penyelesaian:

Diketahui $y = -x^2 + 5x + 6$

Titik stasioner dicapai jika $y' = 0$, yaitu $-2x + 5 = 0$. Didapatkan $x = \frac{5}{2}$, kemudian susbstitusikan ke $y = -x^2 + 5x + 6$ dan kita dapatkan $y = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = \frac{-25 + 50 + 24}{4} = \frac{49}{4}$

Jadi titik stasionernya adalah $\left(\frac{5}{2}, \frac{49}{4}\right)$

Contoh_b.2. Tentukan titik stasioner pada kurva $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 12$.

Penyelesaian:

Titik stasioner dicapai jika $y' = 0 \rightarrow y' = 3x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow\ 3x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow\ (x+2)(3x-2) = 0$

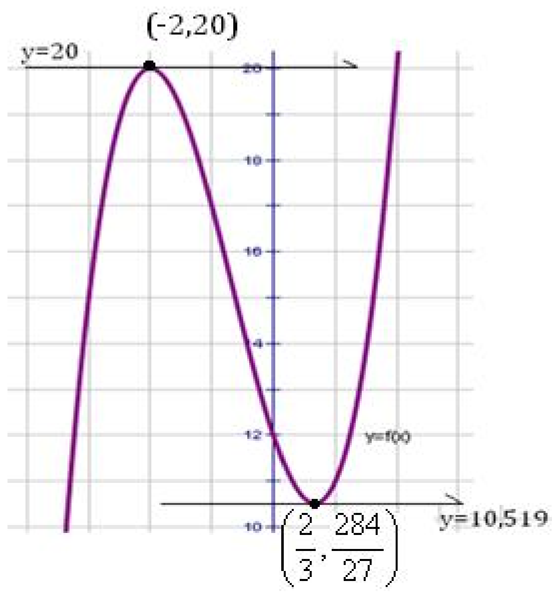
$\Leftrightarrow\ x_1 = -2$ dan $x_2 = \dfrac{2}{3}$ (ada dua titik stasioner)

Substitusikan masing-masing nilai pada $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 12$ untuk mendapatkan y_1 dan y_2.

i. $x_1 = -2 \rightarrow y = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 20$, titik stasioner (-2,20)

ii. $x_2 = \dfrac{2}{3} \rightarrow y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\dfrac{2}{3}\right) + 12 = \dfrac{8 + 24 - 72 + 324}{27} = \dfrac{284}{27} = 10{,}519$, titik stasioner $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{284}{27}\right)$

Grafik:



C. Menentukan fungsi naik, fungsi turun, dan mendatar (stasioner).

Misalkan kurva $y = f(x)$ kontinu dan terdefinisi di setiap titik pada interval I. Kurva $y = f(x)$ memiliki tiga kemungkinan:

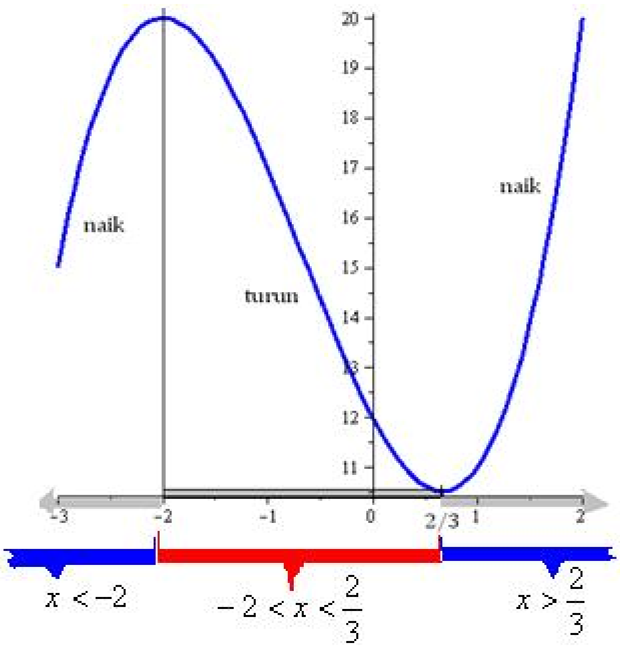
- monoton naik jika $f'(x) > 0$
- monoton turun jika $f'(x) < 0$, dan
- mendatar jika $f'(x) = 0$ (stasioner)

Contoh_c.1. Tentukan interval *x* di mana kurva $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 12$ naik dan atau turun.

Penyelesaian: $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 12$, didapatkan $y' = 3x^2 + 4x - 4$

- $3x^2 + 4x - 4 > 0 \rightarrow (x+2)(3x-2) > 0$ dipenuhi pada $x < -2$ dan $x > \frac{2}{3}$
- $3x^2 + 4x - 4 < 0 \rightarrow (x+2)(3x-2) < 0$ dipenuhi pada $-2 < x < \frac{2}{3}$

Grafik:



D. Ekstrim Maksimum , Ekstrim Munimum, dan Titik belok.

Menentukan jenis titik ekstrim

Misalkan kurva $y = f(x)$ kontinu dan terdefinisi di setiap titik pada interval I. Kurva $y = f(x)$ memiliki tiga kemungkinan: (catatan: f'' adalah turunan kedua)

- § Ekstrim minimum jika $f''(x) > 0$
- § Ekstrim maksimum jika $f''(x) < 0$, dan
- § Titik belok jika $f'(x) = 0$

Contoh_d1. Tentukan titik ekstrim dan jenisnya kurva $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 12$

Penyelesaian: $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 12$, didapatkan $y' = 3x^2 + 4x - 4$

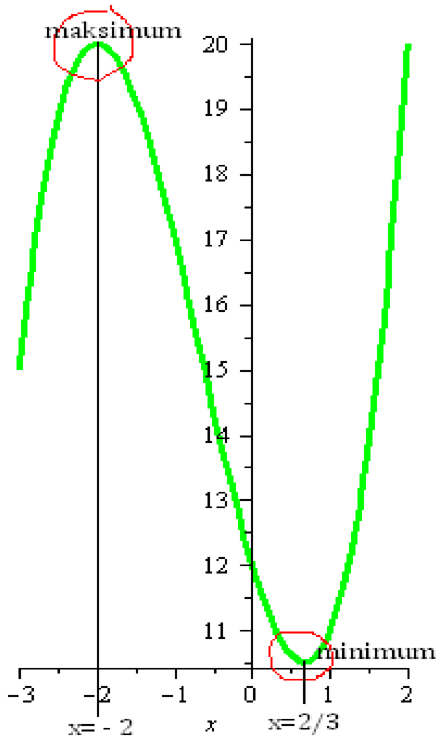
$\Leftrightarrow$ Titik ekstrim: $y' = 3x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow (x+2)(3x-2) = 0 \rightarrow x_1 = -2$ dan $x_2 = \frac{2}{3}$

Substitusikan ke $y'' = 6x + 4$

i. $y''(-2) = 6(-2) + 4 = -8$ (ekstrim maksimum)

ii. $y''\left(\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{2}{3}\right) + 4 = 8$ (ekstrim minimum)

Grafik:



Contoh_d2. Tentukan titik ekstrim dan jenisnya kurva $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$

Penyelesaian: $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5 \rightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3$

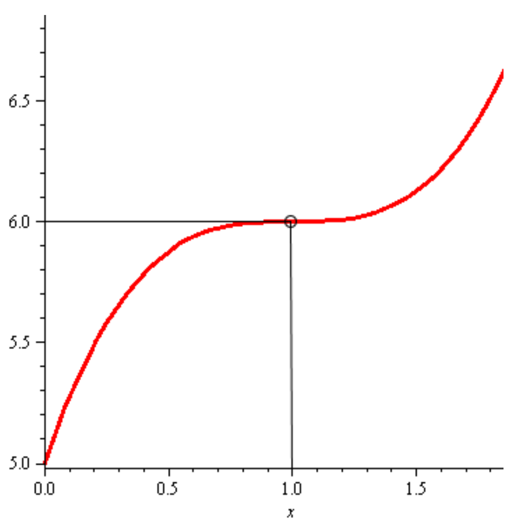
§ Titik ekstrim: $y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$, didapatkan $x = 1$

§ Jenis titik ekstrim: $y'' = 6x - 6$

i. $y''(1) = 6(1) - 6 = 0$ (berupa titik belok)

Grafik:



Aplikasi dalam Bidang Ekonomi

A. Laju Pertumbuhan dan tingkat perubahan fungsi kontinu.

i. Marginal Revenue (MR)

Misalkan fungsi pendapatan (total Revenue): $TR = f(Q)$

- Marginal Revenue (tambahan penerimaan setiap perusahaan menaikkan penjualan satu unit produk):

$$\boxed{MR = \frac{d(TR)}{dQ} = \frac{df(Q)}{dQ} = TR'}$$

Contoh_i1: Diketahui fungsi permintaan suatu barang $\rightarrow$ P = 16– 2Q , dengan Q jumlah barang (unit) dan P harga dalam jutaan rupiah. Berapakah besarnya penerimaan maksimum ?

- Penyelesaian:
  - Fungsi Penerimaan Total (TR) = [harga permintaan]×[jumlah barang terjual]

    $\mathrm{TR} = \mathrm{P} \times \mathrm{Q} = (16 - 2\,Q) \times Q = 16Q - 2Q^2$ (jutaan rupiah)
  - Penerimaan Marjinal $MR = \frac{d(TR)}{dQ} = \frac{df(Q)}{dQ} = TR' = 16 - 4Q$

    $TR' = 16 - 4Q = MR$
  - TR akan maksimum jika TR'=0 atau MR=0 $\rightarrow$ 16 – 4Q = 0 $\rightarrow$ 4Q = 16 $\rightarrow$ Q = 4

    TR(Maks.) dicapai ketika Q=4 unit.

    TR= 16Q – 2 Q^2

    = 16 (4) – 2 $(4)^2$ = 32 (jutaan rupiah)

    Jadi besarnya penerimaan total maksimum sebesar Rp 32.000.000,00

ii. Marginal Cost (MC)

Misalkan fungsi biaya total (total Cost): $TC = g(Q)$

- Marginal Cost (tambahan biaya setiap produksi bertambah 1 unit):

$$\boxed{MC = \frac{d(TC)}{dQ} = \frac{dg(Q)}{dQ} = TC'}$$

Contoh_ii.1. Biaya total (TC) = *g*(Q) = $Q^3 - 3Q^2 + 1.500Q + 400.000$, dengan Q jumlah produk (ratusan unit) dan TC dalam rupiah. Pada tingkat produksi berapakah biaya marjinal minimum? Berapa besarnya biaya marjinal minimum tersebut?

- Penyelesaian:
  - Biaya Marjinal (MC) = TC' = $3Q^2 - 6Q + 1.500$. Didapatkan $\mathrm{MC} = 3\mathrm{Q}^2 - 6\mathrm{Q} + 1.500$
  - MC minimum jika MC ' = 0
  - $MC' = 6Q - 6 \rightarrow 6Q - 6 = 0 \rightarrow \mathrm{Q} = 1$ (ratusan unit)
  - MC(minimum) yaitu ketika $Q = 100 \rightarrow \mathrm{MC} = 3(100^2) - 6(100) + 1.500 = 30.900$

  Jadi besarnya biaya marjinal minimum sebesar Rp 30.900,00 pada tingkat produksi 100 unit.

iii. Marginal Propensity to Consume (MPC)

Misalkan fungsi pengeluaran untuk konsumsi adalah $C = f(Y)$ atau $C = a + bY$

- MPC (perubahan konsumsi setiap perubahan pendapatan):

$$MPC = \frac{dC}{dY} = \frac{df(Y)}{dY} \text{ dengan } 0 < MPC \leq 1$$

iv. Marginal Propensity to Save (MPS)

Misalkan fungsi tabungan adalah $S = Y - C = Y - f(Y)$

§ $MPS = \frac{dS}{dY} = \frac{d(Y - f(Y))}{dY} = \frac{dY}{dY} - \frac{df(Y)}{dY}$. Karena $\frac{df(Y)}{dY} = MPC$, maka berlaku hubungan

$$MPS = 1 - \frac{df(Y)}{dY} = 1 - MPC$$

$$MPS = 1 - MP$$

v. Marginal Physical Product (MPP)

Misalkan fungsi produksi adalah $Q = f(K, L)$ dengan K(variabel modal/kapital) dan L (variabel tenaga kerja/ labour)

a) MPP jika **modal berubah**, tenaga kerja tetap:

$$MPP_K = \frac{dQ}{dK} = \frac{df(K,L)}{dK}$$

b) MPP jika modal tetap, **tenaga kerja berubah**:

$$MPP_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{df(K,L)}{dL}$$

vi. Biaya Rata-rata dan Biaya Marginal

Contoh_vi1. Diketahui fungsi biaya total $\mathrm{TC} = \mathrm{Q}^2 - 8\mathrm{Q} + 100$ dengan Q unit produk dan TC dalam ratusan ribu.

- Tentukan jumlah produksi agar biaya minimal. (Biaya minimal=MC).
- Tentukan fungsi biaya rata-rata dan besarnya biaya rata-rata (AC).
- Tentukan biaya marginal dan biaya rata-rata minimum.

ü Penyelesaian:

- Biaya minimum jika $\mathrm{TC}' = 0 \quad \rightarrow \quad 2\mathrm{Q} - 8 = 0 \rightarrow$ diadapatkan $Q = 4$ unit

  (jumlah produk agar biaya minimum)

- Biaya rata-rata $\mathrm{AC} = \frac{TC}{Q} = \frac{\mathrm{Q}^2 - 8\mathrm{Q} + 100}{Q} = Q - 8 + \frac{100}{Q} \quad \rightarrow \mathrm{AC} = Q - 8 + \frac{100}{Q}$

  Biaya rata-rata ketika Q=4 unit adalah $\bar{C} = 4 - 8 + \frac{100}{4} = -4 + 25 = 21$ (ratusan ribu). Jadi biaya rata-rata adalah Rp 2.100.000,00 per unit. (Bukan biaya rata-rata minimum, tetapi menyebabkan biaya total minimum).

- Biaya marginal: $MC = TC' = 2Q - 8$,

  Biaya rata-rata minimal: dicapai jika AC'=0 $\rightarrow$ $\mathrm{AC}' = 1 - 0 - \frac{100}{Q^2} = 0$

  $1 - \frac{100}{Q^2} = 0, \rightarrow \quad 1 = \frac{100}{Q^2} \rightarrow Q = 10$

  Biaya rata-rata (minimum pada Q=10): substitusi ke $\mathrm{AC} = Q - 8 + \frac{100}{Q}$ dan $MC = 2Q - 8$

  ü $\mathrm{AC} = 10 - 8 + \frac{100}{10} = 12$ (ratusan ribu) atau AC= Rp 1.200.000,00 dan

  ü $MC = 2(10) - 8 = 12$ (ratusan ribu) atau MC= Rp 1.200.000,00

  Jadi ketika **biaya rata-rata minimum**, besarnya biaya rata-rata **sama dengan biaya marginal** yaitu Rp 1.200.000,00

B. Menghitung Laba Maksimum

Misalkan suatu fungsi penerimaan: $TR = f(x)$ dan fungsi biaya total $TC = g(x)$

Laba (π)=[Penerimaan] – [Biaya] $\rightarrow$ $\pi = f(x) - g(x)$ atau $\pi = \mathrm{TC} - \mathrm{TR}$

Laba maksimum dicapai jika $\pi' = 0$

Contoh_b1. Diketahui fungsi penerimaan $\mathrm{TR} = -2\mathrm{Q}^2 + 1.000\mathrm{Q}$ dan fungsi biaya total $\mathrm{TC} = \mathrm{Q}^3 - 59\mathrm{Q}^2 + 1315\mathrm{Q} + 2.000$. Berapakah laba maksimum yang memungkinkan ?

ü Penyelesaian:

$\pi = \mathrm{TC} - \mathrm{TR} = (-2Q^2 + 1000Q) - (Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2.000)$

$\pi = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2.000$

§ Laba maksimum dicapai jika $p' = 0$

$p' = -3Q^2 + 114Q - 315 = 0$, sederhanakan dengan cara membagi -3 setiap suku.

$Q^2 - 38Q + 105 = 0 \rightarrow$ faktorkan

$(Q - 3)(Q - 35) = 0 \rightarrow Q_1 = 3$ dan $Q_2 = 35$ (titik ekstrim)

§ Tentukan jenis titik ekstrim (maksimum atau minimum). Uji dengan p''

$\boldsymbol{\pi'' = -6Q + 114}$

i. Uji pada Q = 3 $\rightarrow p'' = -6Q + 114 = -6(3) + 114 = 96 > 0 \rightarrow \boldsymbol{\pi''} > 0$ (minimum)

ii. Uji pada Q = 35 $\rightarrow p'' = -6Q + 114 = -6(35) + 114 = -96 < 0 \rightarrow \boldsymbol{\pi''} < 0$ (maksimum)

Berarti pada Q = 35 , dicapai laba maksimum

§ Laba Maksimum

$p = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2.000 = (-35)^3 + 57(35)^2 - 315(35) - 2.000$

$p = 13.925$

Jadi Laba maksimum sebesar Rp. 13.925,00 pada jumlah penjualan produk 35 unit.

C. Elastisitas

Elastisitas ε_d adalah persentase perubahan suatu variabel akibat perubahan 1% variabel lainnya.

Misalkan fungsi permintaan $Q = f(P)$

Elastisitas permintaan (point elasticity of demand):

$$e_d = \frac{\dfrac{dQ_d}{Q_d}}{\dfrac{dP}{P}} \times \frac{\dfrac{dQ_d}{dP}}{\dfrac{Q_d}{P}} \qquad \text{atau} \qquad e_d = \frac{dQ_d}{dP} \times \frac{P}{Q_d}$$

Keterangan:

i. $\frac{dQ_d}{dP}$ adalah marginal fungsi permintaan

ii. $\frac{Q_d}{P}$ adalah rata-rata permintaan

iii. Elastisitas (e_d) adalah $\frac{\text{marginal permintaan}}{\text{rata−rata permintaan}}$

iv. Elastis $\rightarrow$ jika $e_d > 0$

v. Inelastis $\rightarrow$ jika $e_d < 0$

vi. Uniter $\rightarrow$ jika $e_d = 0$

Contoh_c1 (Elastisitas Permintaan). Fungsi permintaan suatu barang diketahui Q = 25 – 3 P ^{2}. Tentukan elastisitas permintaannya pada tingkat harga P = 5.

- Penyelesaian :

$$e_d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d} = (-6P)\ \frac{P}{25-3P^2} = -6\,(5)\ \frac{(5)}{25-3(5)^2} = 3$$

Jadi $e_d = 3$ (elastis) artinya pada kedudukan harga P = 5, jika harga barang naik sebesar 1 %, maka permintaannya akan turun sebanyak 3 % .

Contoh_c2 (Elastisitas Penawaran). Diketahui fungsi penawaran suatu barang adalah $\boldsymbol{Q = -200 + 7P^2}$**.** Tentukan elastisitas penawaran barang tersebut, pada tingkat harga P = 10

- Penyelesaian :

$$e_s = \frac{dQ_s}{dP} \times \frac{P}{Q_s} = 14P \times \frac{P}{-200+7P^2}$$

Pada P = 10 $\rightarrow e_s = 14(10) \times \frac{10}{-200+7(10^2)} = 2{,}8$ (elastis)

$e_d = 2{,}8$ artinya pada kedudukan harga P = 10, jika harga barang naik 1 % , maka jumlah barang yang ditawarkan juga akan naik sebanyak 2,8 %.

Contoh_c3 (Elastisitas Produksi). Diketahui fungsi produksi suatu barang adalah $N = 6X^2 - X^3$, dengan X sebagai faktor produksi dan N jumlah produk. Tentukan elastisitas produksi, pada penggunaan faktor produksi (input) sebesar 3.

ü **Penyelesaian:**

$$e_p = \frac{dN_p}{dX} \times \frac{X}{N_p} = \left(12X - 3X^2\right) \times \frac{X}{6X^2 - X^3}$$

Pada X = 3 $\rightarrow e_p = \left[12(3) - (3^2)\right] \times \frac{3}{6(3^2) - (3^3)} = 1$

$e_d = 1$ (uniter) artinya pada tingkat penggunaan input X = 3 , jika input dinaikkan 1 %, maka jumlah produksi juga akan bertambah 1 %.

D. Tingkat Pertumbuhan (Growt Rate)

i. Misalkan fungsi pertumbuhan $y = f(t)$, dengan y sebagai fungsi kontinu dan t adalah waktu.

Misalkan ry adalah tingkat pertumbuhan y, maka

$$r_y = \frac{\frac{dy}{dt}}{y} = \frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{\textbf{fungsi marginal}}{\textbf{fungsi total}}$$

Jika ditulis dalam persen, maka menjadi

$$r_y = \frac{\frac{dy}{dt}}{y} * 100\% \quad \text{atau} \quad r_y = \frac{f'(y)}{f(y)} * 100\%$$

ii. Misalkan jumlah penduduk pada tahun ke t adalah : $P_t = P_0.e^{r.t}$

Pertumbuhan penduduk per tahun:

$$r = \frac{dP/dt}{P_t} = \frac{P_0.e^{rt}.r}{p_0.e^{rt}}$$

Catatan:

P_t: Jumlah penduduk setelah t tahun
P_0: Jumlah penduduk awal tahun perhitungan
e: bilangan natural (2,7182183…)
r : tingkat pertumbuhan

Soal Tugas: (Lihat Contoh_vi1)

1. Diketahui fungsi biaya total $\text{TC} = \text{Q}^2 - 6\text{Q} + 12$, dengan Q unit produk dan TC dalam Jutaan Rupiah. Tentukan
   a. Jumlah produksi agar biaya minimum;
   b. Biaya rata-rata minimum dan besarnya biaya rata-rata.

2. Misalkan diketahui fungsi biaya produksi adalah $C = Q^3 - 6Q^2 + 15Q$. Buktikan bahwa biaya rata-rata minimum sama dengan biaya marginal.