Aljabar Matriks

No	No Unit	Unit Kompetensi
1		Menerapkan keamanan web dinamis
2		Membuat halaman web dinamis dasar
3		Membuat halaman web dinamis lanjut
4		Menerapkan web hosting
5		Menerapkan konten web memenuhi protokol standar
6		Menerapkan dasar validasi unjuk kerja situs web
7		Mengintegrasikan sebuah basis data dengan sebuah situs web
8		Memelihara unjuk kerja situs web

Jam/Minggu 3 Jam	**Semester** : 4	**Sifat:** Wajib
Kode Mata Kuliah	VI0206/VI0256	
Nama Matakuliah	Aljabar Matriks	
Silabus ringkas	Kuliah ini mengajarkan dasar-dasar Matriks, Determinan, Invers, SPL/H dan penerapanya, Ruang Vektor, Basis, Dimensi, Nilai & Vektor Eigen, dan Transformasi Linear	
Tujuan Instruksional Umum (TIU)	Menguasai teknik dasar aljabar linear dan mampu menggunakannya untuk menyelesaikan SPL, dapat menentukan basis dan dimensi suatu ruang vektor, dapat mencari nilai dan vektor eigen serta dapat mentransformasikan secara linear	
Mata Kuliah Penunjang	1. Matematika I	
	2. Matematika II	
Penilaian	UTS =	40%
	UAS =	40 %
	Tugas =	20 %
Daftar Pustaka	1. Howard Anton, Dasar-Dasr Aljabar Linear, Interaksara, Batam , 2000	
	2. Steven J.Leon, Aljabar Linear dan Aplikasinya, Erlangga, Jakarta, 2001	

Uraian Rinci Materi Kuliah

Mg#	Kompetensi	Sub Kompetensi	Kriteria Kinerja	Lingkup Belajar	Materi Pokok Pemelajaran		
					Sikap	Pengetahuan	Keterampilan
1	Mahasiswa mempunyai motivasi dan gambaran yang jelas mengenai materi aljabar matriks.	Pendahuluan/ Pengantar	•	• Prinsip aljabar matriks • Mengapa aljabar matriks penting • Dimana aljabar matriks dibutuhkan	•	•	•
2	Mahasiswa dapat mengetahui bentuk SPL dan operasi yang dpat digunakan.	Sistem Persamaan Linear (SPL)	•	• Pengantar SPL • Operasi Baris elementer (OBE)	•	•	•
3	Mahasiswa memahami macam penyelesaian SPL.		•	• SPL dengan penyelesaian tunggal • SPL dengan Penyelesaian Banyak • Tidak ada penyelesaian SPL	•	•	•
4	Mahasiswa memahami cara menyelesaikan SPL		•	• Eliminasi Gauss • Eliminasi Gauss-Jordan • SPL dengan Invers	•	•	•
5	Mahasiswa memahami SPL yang lainnya.		•	• SPL Homogen • Penyelesaian SPL Homogen	•	•	•
6	Mahasiswa		•	• Contoh Penerapan	•	•	•

Mg#	Kompetensi	Sub Kompetensi	Kriteria Kinerja	Lingkup Belajar	Materi Pokok Pemelajaran		
					Sikap	Pengetahuan	Keterampilan
	memahami kegunaan SPL.			SPL			
7	Mahasiswa memahami arti matriks dan vector dan operasi yang dapat digunakan.		•	• Pengertian Matriks dan Vektor • Operasi yang berlaku di matriks dan Ve ktor	•	•	•
8	Mahasiswa memahami pengertian fungsi determinan dan cara menghitungnya.		•	• Pengertian fungsi Determinan • Menghitung determinan • Sifat determinan	•	•	•
9	Mahasiswa memahami pengertian nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks		•	• Pengertian Nila i eigen dan vektor eigen • Mencari Nilai eigen dan vector eigen	•	•	•
10	Mahasiswa memahami pengertian ruang vector dan subruangnya		•	• Pengertian Ruang Vektor • Pengertian Sub-Ruang vektor.	•	•	•
11	Mahasiswa memahami pengertian dasar bebas linear dari suatu himp unan vector dan Himpunan vector yang membanguna ruang vector		•	• Pengertian Bebas linear • Pengertian Membangun Ruang Vektor	•	•	•
12	Mahasiswa memahami pengertian basis dan dimensi dari		•	• Basis ruang vektor • Dimensi ruang vector	•	•	•

Mg#	Kompetensi	Sub Kompetensi	Kriteria Kinerja	Lingkup Belajar	Materi Pokok Pemelajaran		
					Sikap	Pengetahuan	Keterampilan
	ruang vector						
13	Mahasiswa dapat mencari diagonalisasi dan diagonalisasi orthogonal dari suatu matriks		•	• Diagonalisasi • Diagonalisasi ortogonal	•	•	•
14	Mahasiswa memahami pengertian rank dan nulitas dan dapat mencarinya		•	• Pengertian rank (Peringkat) • Pengertian nulitas (kekosongan)	•	•	•
15	Mahasiswa memahami pengertian TL dan matriksnya		•	• Pengertian Transformasi Linear (TL) • Matriks TL • Kernel dan daerah hasil	•	•	•
16	Mahasisa dapat menerapkan TL		•	• Beberapa contoh TL	•	•	•

Referensi adalah nomer urutan references pada A1.

Modul Aljabar Matriks

Disusun oleh:
Chairul Imron,
Sentot Didik S.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
BIRO PERENCANAAN DAN KERJASAMA LUAR NEGERI

Kata Pengantar

Puji syukur kehadirat Yang Maha Kuasa yang telah memberikan pertolongan hingga modul ajar ini dapat terselesaikan.

Modul ajar ini dimaksudkan untuk membantu penyelenggaraan kuliah jarak jauh. Sejalan dengan tujuan penyelenggaraan perkuliahan, materi modul ajar ini dipilih dari pokok-pokok aljabar matriks sebagai bahan penyeragaman pemahaman aljabar martriks bagi mahasiswa. Dalam hal ini, setelah mengikuti kuliah sesuai materi dalam modul ajar ini, diharapkan mahasiswa mempunyai bekal yang cukup baik untuk mengikuti perkuliahan.

Materi yang diberikan dalam modul ajar ini cukup untuk ukuran perkuliahan satu semester. Untuk itu, materi dalam modul ini diberikan dengan cara sederhana dan contoh singkat; mengingat bahwa semua materi harus diserap sendiri. Untuk itu diharapkan peserta kuliah dengan tekun dan sungguh-sungguh mengikuti modul ini dan aktif mengerjakan soal-soal.

Penyusun menyampaikan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu hingga tersusunnya modul ini. Tak lupa, kritik dan saran untuk menyempurnakan modul ini sangat diharapkan.

Surabaya, Januari 2007

Penyusun

Daftar Isi

Modul 1

Sistem Persamaan Linear

Pendahuluan

Pada Modul ini akan dibahas materi yang berkaitan dengan sistem persamaan linear atau biasa disingkat dengan sistem linear dan penyelesaian dari sistem tersebut. Kemudian akan dibahas atau dikenalkan beberapa metode penyelesaiannya dan himpunan penyelesaiannya.

Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa menguasai atau memahami suatu teknik dasar aljabar linear dan mampu menggunakannya untuk menyelesaikan SPL.

Tujuan Instruksional Khusus

Mhs dapat mengetahui bentuk SPL dan cara menyelesaikannya, begitu juga matriks dan operasinya, secara khusus diharapkan :

1. Memahami pengertian persamaan linear
2. Memahami sistem persamaan linear (SPL)
3. Menyelesaikan SPL dengan berbagai cara

1.1 Pengantar SPL

Persamaan linear adalah persaman yang tidak mengandung atau melibatkan hasil kali atau akar variabel, semua variabel mempunyai pangkat satu dan tidak sebagai variabel bebas dari fungsi trigonometri, logaritma atau eksponen.

CONTOH 1.1.1 Beberapa persamaan linear, yaitu

$$2x + 3y = 6 \tag{1.1}$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12 \tag{1.2}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1.3}$$

$\Diamond$

Persamaan 1.1 yaitu persamaan linear dengan variabel x dan y, dengan koefisien 2 dan 3 yang merupakan persamaan garis. Persamaan 1.2 yaitu persamaan linear dengan variabel x_1, x_2 dan x_3, dengan koefisien $4, 3$ dan 2 yang merupakan persamaan bidang. Sedangkan Persamaan 1.3 yaitu persamaan linear dengan variabel x_i dan koefisien a_i dan b dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

CONTOH 1.1.2 Beberapa persamaan tak linear, yaitu

$$2x^2 + y = 7 \tag{1.4}$$

$$3x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_3 = 14 \tag{1.5}$$

$$a_1\sqrt{x_1} + a_2x_2^2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1.6}$$

$\Diamond$

Persamaan 1.4 bukan persamaan linear, karena variabel x mempunyai pangkat dua. Persamaan 1.5 bukan persamaan linear, karena terdapat perkalian dua variabel yaitu x_1x_2 dan x_2 mempunyai pangkat dua, begitu juga Persamaan 1.6.

Penyelesaian dari persamaan linear adalah pemberian nilai pada variabel yang ada sedemikian hingga persamaan itu benar. Misal Persamaan 1.1, jika variabel x diberi nilai 0, maka variabel y harus bernilai 2, atau beri nilai sebarang pada x, maka nilai y dapat ditentukan kemudian, nilai sebarang itu misalnya t, sehingga

$$x = t, \qquad y = \frac{1}{3}(6 - 2t)$$

Begitu juga untuk Persamaan 1.2

$$x_1 = t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = \frac{1}{2}(12 - 4t - 3s)$$

atau dengan pemberian nilai yang lain, misal

$$y = t, \qquad x = \frac{1}{2}(6 - 3t)$$

Begitu juga untuk Persamaan 1.2

$$x_2 = t, \qquad x_3 = s, \qquad x_1 = \frac{1}{4}(12 - 3t - 2s)$$

Sedangkan Persamaan 1.3 akan terpenuhi jika variabel x_i dimana $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ diberi nilai yang sesuai sehingga persamaan linear tersebut memenuhi, misal $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \cdots$, $x_n = s_n$, maka penyelesaian persamaan linear tersebut adalah pasangan terurut $(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n)$. Karena penyelesaian dari persamaan tersebut tidak hanya satu, maka semua penyelesaian dari persamaan terhimpunan dalam himpunan penyelesaian.

Persamaan linear yang lebih dari satu (terhingga) dan variabelnya saling terkait, himpunan persamaan tersebut dinamakan **sistem persamaan linear** atau **sistem linear**.

CONTOH 1.1.3 Sistem linear yang terdiri dari dua persamaan dengan tiga variabel,

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 3z &= -1 \\ 3x + y + 9z &= -4 \end{aligned}$$

Salah satu penyelesaian dari sistem linear tersebut adalah $x = 1$, $y = 2$ dan $z = -1$, karena nilai tersebut memenuhi kedua persamaan, sedangkan penyelesaian yang lain, $x = 2$, $y = -1$ dan $z = -1$ bukan penyelesaian dari sistem tersebut, sebab nilai tersebut memenuhi persamaan yang kedua, tetapi tidak memenuhi persamaan pertama. $\diamondsuit$

CONTOH 1.1.4 Sistem linear yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel,

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + y &= 13 \end{aligned}$$

Hanya satu penyelesaian dari sistem linear tersebut, $x = 4$ dan $y = 1$, karena tidak ditemukan penyelesaian yang lain. $\diamondsuit$

CONTOH 1.1.5 Sistem linear yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel,

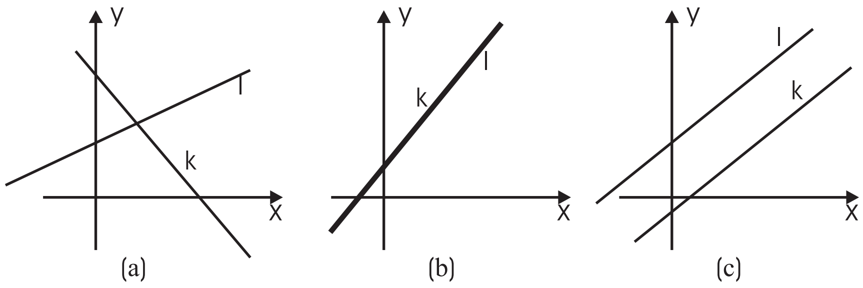
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x + 3y &= 8 \end{aligned}$$

Sistem linear tersebut tidak konsisten, karena jika persamaan pertama dikalikan dengan tiga, kedua persamaan tersebut tidak konsisten, sehingga sistem linear tersebut tidak mempunyai penyelesaian. $\diamondsuit$

Secara umum, ada tiga kemungkinan penyelesaian dari sistem persamaan linear, yang dapat diilustrasikan sebagai dua persamaan garis, yaitu

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

dan penyelesaiannya adalah



Gambar 1.1 Tiga Macam Penyelesaian Sistem Linear

1. Sistem linear mempunyai satu penyelesaian, jika dua garis tersebut berpotongan pada satu titik. Lihat Gambar 1.1(a)
2. Sistem linear mempunyai banyak penyelesaian, jika dua garis tersebut berimpit. Lihat Gambar 1.1(b)
3. Sistem linear tidak mempunyai penyelesaian, jika dua garis tersebut sejajar. Lihat Gambar 1.1(c)

Sebarang sistem persamaan linear dengan m persamaan dan n variabel dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \;+\; \vdots \;+\; \vdots \;+\cdots+\; \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.7}$$

dengan x_i adalah variabel dan a_{ij} dan b_j adalah koefisien konstanta dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Persamaan 1.9 dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

dan dapat ditulis dalam bentuk singkat, yaitu

$$A\overline{x} = \overline{b} \tag{1.8}$$

Pada proses pencarian penyelesaian dari sistem linear tersebut, biasanya tanda $+$,x dan $=$ dihilangkan sehingga terbentuk suatu matriks yan glebih singkat yang dinamakan matriks diperbesar (augmented matrix), yaitu matriks A dan mariks $\bar{b}$ digabung jadi satu kesatuan matriks, hasilnya

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

□ **Sistem Linear Homogen**

Suatu sistem dikatakan linear homogen, jika matriks $\bar{b}$ diganti dengan matriks $\bar{0}$, atau sistem tersebut mempunyai bentuk

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= 0 \\ \vdots \;+\; \vdots \;+\; \vdots \;+ \cdots + \;\vdots\quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_mx_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sistem ini mempunyai penyelesaian trivial jika $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ dan mempunyai penyelesaian tak trivial jika sistem mempunyai penyelesaian selain itu.

1.2 Penyelesaian SPL

Untuk mencari penyelesaian umum atau himpunan penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear, ada beberapa cara yang sederhana adalah substitusi (seperti di SMU). Sebelum mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear, perhatikan terlebih dahulu metode dasar atau elementer yang mirip dengan metode substitusi yaitu operasi baris elementer yang lebih dikenal dengan sebutan OBE.

Pada metode substitusi, langkah untuk menghilangkan sebuah variabel dapat dilakukan dengan tiga langkah, yaitu

1. Mengalikan persamaan dengan sebuah konstanta tak-nol
2. Tukarkan dua persamaan
3. Tambahkan perkalian dari persamaan ke persamaan yang lain

Sedangkan pada metode operasi baris elementer, langkah untuk menghilangkan sebuah konstanta pada kolom tertentu dapat dilakukan dengan tiga langkah, yaitu

1. Mengalikan baris dengan sebuah konstanta tak-nol
2. Tukarkan dua baris
3. Tambahkan perkalian dari baris ke baris yang lain

CONTOH 1.2.1 Pandang sistem persamaan linear berikut ini,

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \qquad (1.10) \\ 2x + 5y &= 12 \qquad (1.11) \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan dengan metode substitusi, lakukan langkah pertama, yaitu: kalikan Persamaan 1.10 dengan 2, sehingga menjadi

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 10 \\ 2x + 5y &= 12 \end{aligned}$$

kemudian kurangkan Persamaan 1.11 dengan Persamaan 1.10, maka Persamaan 1.11 menjadi

$$y = 2$$

dan

$$x + 2.2 = 5, \qquad \text{maka} \qquad x = 1$$

Tetapi, jika menggunakan metode OBE, buatlah matriks diperbesar dari sistem persamaan linear tersebut, kemudian lakukan OBE dengan perintah, kurangi baris kedua dengan dua kali baris pertama, dilanjutkan kurangi baris satu dengan dua kali baris kedua sehingga menjadi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix} \underbrace{B_2 - 2B_1}_{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{B_1 - 2B_2}_{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

kembalikan ke bentuk sistem persamaan linear, sehingga $x = 1$ dan $y = 2$ ◊

□ Baris Eselon Tereduksi

Telah dipelajari langkah-langkah OBE, seperti pada Contoh 1.2.1. Pada bagian ini akan ditunjukkan bentuk dari suatu matriks yang mempunyai sifat *baris eselon* dan *baris eselon tereduksi* adalah sebagai berikut:

1. Jika suatu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka angka tak-nol pertama dalam baris tersebut adalah satu yang disebut dengan **utama-1**
2. Jika ada baris terdiri dari nol semua, maka pindahkan ke bagian bawah matriks

3. Jika ada dua baris yang beurutan yang tidak seluruhnya nol, utama-1 pada baris yang lebih bawah terletak disebelah kanan utama-1 dari baris atasnya

4. Setiap kolom yang berisi utama-1 mempunyai nol di baris yang lainnya

Jika suatu matriks mempunyai sifat 1, 2 dan 3, maka matriks tersebut disebut matriks bentuk baris eselon, sedangkan matriks yang mempunyai ke-empat sifat tersebut dinamakan matriks bentuk baris eselon tereduksi.

CONTOH 1.2.2 Matriks-matriks dalam bentuk baris eselon, seperti dibawah ini

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sedangkan matriks-matiks dalam bentuk baris eselon tereduksi adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◊

□ **Metode Eliminasi Gauss**

Metode eliminasi Gauss adalah suatu metode untuk mencari himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan menggunakan OBE, sedemikian hingga matriksnya mempunyai bentuk baris eselon. Setelah terbentuk baris eselon, kembalikan matriks tersebut dalam bentuk sistem linear dan kemudian lakukan substitusi balik mulai dari bawah.

CONTOH 1.2.3 Selesaikan sistem persamaan linear dibawah ini dengan menggnakan metode eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 14 \\ x + 4y + 9z &= 36 \end{aligned}$$

Jawab:

Ubah sistem linear ke bentuk matriks diperbesar,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{pmatrix}$$

kemudian lakukan OBE, sedemikian hingga matriksnya menjadi bentuk baris eselon, seperti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_2 - B_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_3 - B_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_3 - 3B_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_2(\tfrac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ubah kembali ke sistem linear menjadi

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ y + 2z &= 8 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

lakukan substitusi balik, yaitu

$$z = 3$$

$$y + 2.3 = 8, \qquad y = 2$$

$$x + 2 + 3 = 6, \qquad x = 1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $x = 1$, $y = 2$ dan $z = 3$ $\quad\Diamond$

□ Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan adalah suatu metode untuk mencari himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan menggunakan OBE, sedemikian hingga matriksnya mempunyai bentuk baris eselon tereduksi. Setelah terbentuk baris eselon tereduksi, kembalikan matriks tersebut dalam bentuk sistem linear dan ditemukan kemudian lakukan substitusi balik mulai dari bawah.

Dengan Contoh 1.2.3, lanjutkan OBEnya sedemikian hingga matriksnya berbentuk baris eselon tereduksi, yaitu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_1 - B_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_1 + B_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_2 - 2B_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

kembalikan ke bentuk sistem linear, yaitu

$$z = 3$$

$$y = 2$$

$$x = 1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $x = 1$, $y = 2$ dan $z = 3$ $\Diamond$

CONTOH 1.2.4 Carilah penyelesaian dari sistem linear homogen berikut

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + -4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

jawab:

Ubah sistem linear dalam bentuk matriks, kemudian lakukan OBE sehingga menjadi matriks dalam bentuk eselon tereduksi, seperti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_2 - B_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_3 - B_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_3 - 2B_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_1 - B_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_3(-\tfrac{1}{11}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_2 - 3B_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_1 + 2B_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kembalikan ke sistem linear, sehingga didapat

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi penyelesaiannya adalah

$$x_1 = s, \quad x_2 = -2s, \quad x_3 = s, x_4 = 0$$

$\Diamond$

1.3 Matriks dan Operasinya

Pada bagian ini akan dibahas tentang definisi matriks, operasi yang berlaku dan beberapa sifat matriks, dalam hal ini elemen dari matriks dibatasi pada bilangan real saja. Perhatikan definisi dibawah ini

DEFINISI 1.3.1 *Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu dinamakan anggota matriks tersebut*

CONTOH 1.3.1 Beberapa contoh matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \Diamond$$

Ukuran matriks ditunjukan dengan banyaknya baris dan banyaknya kolom, seperti pada Contoh 1.3.1 secara berurutan, ukuran matriks pertama adalah 3×2, karena matriks terdiri dari tiga baris dan dua kolom. Begitu juga matriks selanjutnya mempunyai ukuran 3×3, matriks yang ketiga juga dinamakan dengan matriks baris atau vektor baris karena hanya terdiri dari sebuah baris saja dan yang terakhir adalah matriks kolom atau vektor kolom, karena hanya terdiri dari sebuah kolom saja. Keduanya, vektor kolom dan vektor baris dilambang dengan sebuah huruf kecil tebal atau huruf kecil diberi garis atasnya. Secara umum notasi untuk sebauh matriks menggunakan huruf besar, sedangkan anggota dari matriks biasanya menggunakan huruf kecil.

CONTOH 1.3.2 Matriks A mempunyai ukuran $m \times n$, maka matriks tersebut dapat ditulis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

atau dapat ditulis

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})$$

jika diinginkan untuk menyebut sebuah anggota matriks A pada baris ke-i dan kolom ke-j, yaitu

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

$\Diamond$

Perhatikan beberapa definisi dibawah ini:

DEFINISI 1.3.2 *Dua matriks dikatakan* ***sama*** *jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama dan anggota yang berpadanan juga sama*

Jika ada dua matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dikatakan sama, maka berlaku $(A)_{ij} = (B)_{ij}$. Perhatikan contoh dibawah ini.

CONTOH 1.3.3 Pandang tiga matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Jika matriks $A = B$, maka nilai x pada A harus sama dengan 2. Matriks B tidak sama dengan matriks C, karena kedua matriks tersebut tidak mempunyai ukuran yang sama. $\diamondsuit$

DEFINISI 1.3.3 *Jika dua matriks A dan B mempunyai ukuran yang sama, maka kedua matriks tersebut dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Untuk menambahkan atau mengurangkan kedua matriks tersebut anggota yang berpadanan dijumlahkan atau dikurangkan. Matriks yang tidak mempunyai ukuran yang sama tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan*

Dua matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika kedua mtriks tersebut mempunyai ukuran yang sama, hasil penjumlahannya atau pengurangannya adalah

$$(A \pm B)_{ij} = (A)_{ij} \pm (B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

CONTOH 1.3.4 Pandang tiga matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

maka hasil penjumlahan dan pengurangan matriks A dan B, adalah

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+(-3) \\ 3+6 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-4 & 2-(-3) \\ 3-6 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

bagaimana kalau $A + C$, tidak dapat dilakukan karena ukuran kedua matriks tersebut tidak sama. $\diamondsuit$

DEFINISI 1.3.4 *Jika A sebarang matriks dan c sebarang skalar, maka hasil kali skalar dan matriks cA adalah mengalikan semua anggota A dengan skalar c*

CONTOH 1.3.5 Jika matriks A pada Contoh 1.3.4 dikalikan dengan 3, maka hasilnya adalah

$$3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Begitu juga jika matriks C dikalikan dengan 2, hasilnya

$$2C = 2\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 10 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

DEFINISI 1.3.5 *Dua matriks A dan B dapat dikalikan, jika matriks A mempunyai $r \times n$, dan matriks B harus mempunyai ukuran $n \times l$ maka matriks hasil-kalinya mempunyai ukuran $r \times l$ dengan anggota ke-ij berasal dari perkalian baris ke-i dari matriks A dengan kolom ke-j dari matriks B.*

CONTOH 1.3.6 Matriks A dan B pada Contoh 1.3.4 dapat dikalikan, karena ukuran matriks A adalah 2×2 dan matriks B berukuran 2×2 sehingga kedua matriks tersebut dapat dikalikan dan hasilnya adalah

$$A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 + 2.6 & 1.(-3) + 2.3 \\ 3.4 + 4.6 & 3.(-3) + 4.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 36 & 3 \end{pmatrix}$$

dengan cara yang sama, jika matriks A dikalikan dengan matriks C, hasilnya

$$A\,C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 17 \\ 33 & 22 & 39 \end{pmatrix}$$

sedangkan matriks C tidak dapat dikalikan dengan matiks A, karena ukuran matriksnya tidak sesuai dengan definisi yang ada. $\Diamond$

DEFINISI 1.3.6 *Matriks transpose dari matriks A ditulis A^T yang anggotanya merupakan anggota A dengan mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris*

CONTOH 1.3.7 Transpose ketiga matriks pada Contoh 1.3.4 adalah

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

DEFINISI 1.3.7 *Jika matriks A persegi, maka **trace** A dinyatakan dengan **tr(**A**)**, didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota pada diagonal utam matriks A*

CONTOH 1.3.8 Dengan menggunakan matriks pada Contoh 1.3.4, maka

$$tr(A) = 1 + 4 = 5 \qquad tr(B) = 4 + 3 = 7$$

sedangkan trace dari matriks C tidak dapat dicari, karena matriks C bukan matriks persegi
$\Diamond$

1.4 Matriks Invers

Pada bagian ini akan dibahas tentang invers dari suatu matriks dan cara mencari inversnya. Sifat-sifat dasar dari suatu matriks yang mempunyai invers. Sebelumnya akan dikenal terlebih dahulu beberapa jenis matriks yang akan dipakai secara langsung.

Sebuah matriks dikatakan ***matriks nol***, jika semua anggota dari matriks tersebut nol semuanya. Sedangkan ukuran dari matriks nol tersebut tergantung pada matriks kawannya.

CONTOH 1.4.1 Contoh beberapa matriks nol dengan beberapa ukuran yang berbeda

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

Jika matriks sebarang A dan matriks nol 0 dengan ukuran yang sama, jelas bahwa $A + 0 = 0 + A = A$, sama seperti bilangan real $a + 0 = 0 + a = a$. Tiga bilangan a, bdan c semuanya tidak nol, jika $ab = ac$, maka $b = c$, begitu juga untuk dua bilangan yang berbeda, jika $de =$, maka salah satu bilangan tersebut harus nol. Hal ini ttidak berlaku pada matriks.

CONTOH 1.4.2 Pandang empat yang berbeda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berlaku

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

padahal matriks B tidak sama dengan matriks C, begitu juga $AD = 0$, salah satu dari matriks tersebut tidak harus nol. $\diamondsuit$

Matriks identitas adalah matriks persegi yang anggotanya semua nol kecuali pada diagonal utama semuanya bilangan satu, biasanya disimbol dengan I_n, dimana n adalah ukuran matriksnya.

CONTOH 1.4.3 Beberapa contoh matriks identitas

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

Matriks sebarang A jika dikalikan dengan matriks identitas atau sebaliknya (dapat dilakukan), hasilnya adalah matriks A sendiri, atau ditulis

$$AI = IA = A$$

CONTOH 1.4.4 Misalkan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

maka

$$I_2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

begitu juga

$$AI_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

Perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 1.4.1 *Jika matriks persegi A dilakukan OBE pada matriks tersebut sehingga menjadi matriks yang berbentuk baris eselon tereduksi yaitu R, maka R adalah matriks yang mempunyai baris nol semua atau matriks identitas.*

Bukti:

Pandang suatu matriks persegi A kemudian lakukan OBE, setiap satu utama yang dihasilkan maka pada kolom tersebut pada baris yang lainnya semua nol. Jika dilakukan terus, maka yang dihasilkan adalah matriks identitas atau matriks yang mengandung baris yang nol semua. $\diamondsuit$

CONTOH 1.4.5 Pandang matrisk persegi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

lakukan operasi baris elementer, sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \underset{B_3 - B_1}{\overset{B_2 - B_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \underset{B_3 - 3B_2}{\overset{B_1 - B_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{B_3(\frac{1}{2})}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{B_2 - 2B_3}{\overset{B_1 + B_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

Pada bagian ini akan dibahas tentang invers dari suatu matriks, sebelumnya perhatikan definisi invers dibawah ini

DEFINISI 1.4.2 *Jika A matriks persegi dan jika matriks persegi lain yang dapat ditemukan B berukuran sama, sedemikian hingga berlaku $AB = BA = I$, maka A disebut matriks yang dibalik atau matiks yang punyai invers dan matriks B disebut invers dari matriks A.*

CONTOH 1.4.6 Matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ adalah invers dari matiks $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ karena

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

dan

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\Diamond$

Sekarang perhatikan teorema berikut

TEOREMA 1.4.3 *Jika B dan C keduanya adalah invers dari matriks A, maka $B = C$*

Bukti:

Karena B invers dari A, maka $AB = I$. Kalikan kedua sisi dengan C, sehingga $C(AB) = CI = C$, sedangkan $(CA)B = IB = B$, jadi $B = C$ $\Diamond$

TEOREMA 1.4.4 *Jika matriks A dan B adalah matriks yang mempunyai invers dan beukuran sama, maka*

1. *AB juga mempunyai invers*
2. *$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*

Bukti:

Dengan mengalikan kedua sisi dengan AB, maka

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = I$$

Secara simultan telah ditunjukan bukti untuk (a). $\Diamond$

CONTOH 1.4.7 Tinjau matriks dibawah ini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

maka dapat ditemukan

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

sedangkan

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$$

$\Diamond$

Beberapa sifat yang tersirat pada definisi dan teorema (bukti cari di buku lain) yang dapat dipakai untuk menambah wawasan, antara lain

DEFINISI 1.4.5 *Jika matriks persegi A, maka dapat didefiniskan*

$$A^0 = I \qquad A^n = \underbrace{AAA\cdots A}_{n\ faktor} \qquad (n > 0)$$

jika A mempunyai invers, didefinisikan

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n\ faktor}$$

TEOREMA 1.4.6 *Jika matriks persegi A, dan r, s bilangan bulat, maka*

$$A^rA^s = A^{r+s} \qquad (A^r)^s = A^{rs}$$

TEOREMA 1.4.7 *Jika A matriks yang mempunyai invers, maka*

1. *A^{-1} mempunyai invers, dan $(A^{-1})^{-1} = A$*
2. *A^n mempunyai invers dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, untuk n bilangan bulat positip*
3. *Untuk k skalar tak nol, kA mempunyai invers dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$*

CONTOH 1.4.8 Lihat matriks pada Contoh 1.4.7, yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

maka

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{pmatrix}$$

dan

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{pmatrix}$$

$\lozenge$

TEOREMA 1.4.8 *Jika matrisk A mempunyai invers, maka A^T juga mempunyai invers dan*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

CONTOH 1.4.9 Lihat matriks pada Contoh 1.4.7, yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

maka

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

seperti pada Teorema 1.4.8. $\diamondsuit$

1.5 Matriks Elementer dan Mencari Invers

Pada bagian ini akan dibahas tentang matriks elementer atau matriks dasar yaitu suatu matriks yang didapat dari OBE dari matriks identitas. Dibahas pula cara mencari invers dari suatu matriks. Perhatikan definisi dibawah ini

DEFINISI 1.5.1 *Matriks elementer atau matriks dasar adalah matriks persegi yang dihasilkan dari OBE tunggal terhadap matriks identitas.*

CONTOH 1.5.1 Perhatikan tiga matriks elementer berikut

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks E_1 adalah matriks hasil OBE terhadap matriks identitas dengan operasinya adalah baris ketiga dikalikan dengan tiga, matriks E_2 operasinya adalah baris ketiga ditambah dua kali baris kedua, dan matriks E_3 operasinya adalah tukarkan baris pertama dengan baris ketiga. $\diamondsuit$

Jika ada matriks sebarang dapat dikalikan dengan matriks elementer maka hasilnya sama dengan matriks sebarang tersebut dilakukan OBE yang sama dengan matriks elementer tersebut.

CONTOH 1.5.2 Matriks sebarang, misal A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dapat dikalikan dengan matriks E_1 pada Contoh 1.5.1, maka hasilnya sama dengan matriks A dengan OBE yang sama

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

sedangkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{B_3(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lozenge$

Hasil satu operasi OBE pada matriks identitas menghasilkan sebuah matriks elementer, sebaliknya sebuah matriks elementer dapat juga dilakuan satu operasi OBE sedemikian hingga kembali menjadi matriks identitas dengan operasi kebalikannya.

CONTOH 1.5.3 Perhatikan tiga matriks elementer pada Contoh 1.5.1 akan dilakukan operasi kebalikan sedemikian hingga kembali menjadi matriks identitas

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{B_3(\tfrac{1}{3})} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

dan

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{B_3 - 2B_1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

dan

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{B_{13}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

OBE yang dikenakan pada E_1, yaitu baris ketiga dikalikan dengan sepertiga adalah kebalikan dari OBE pada I yang menghasilkan E_1, yaitu baris ketiga dikalikan dengan tiga. Begitu juga untuk E_2 dan E_3. $\lozenge$

Oleh karena itu perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 1.5.2 *Setiap matriks elementer mempunyai invers, dan inversnya merupakan matriks elementer juga*

Bukti:

Jika E matriks elementer yang dihasilkan dari OBE pada I, dan E_0 juga merupakan matriks elementer yang dihasilkan dari OBE pada I dengan opeasi kebalikannya, maka

$$EE_0 = E_0E = I$$

artinya E_0 adalah invers dari E atau sebaliknya.

CONTOH 1.5.4 Perhatikan matriks elementer yang dihasilkan dengan mengalikan tiga pada baris ketiga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_3(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = E$$

perhatikan pula matriks elementer yang dihasilkan dengan operasi kebalikannya yaitu baris ketiga dikalikan dengan sepertiga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_3(\tfrac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = E_0$$

sekarang kalikan antara E dan E_0 atau sebaliknya

$$EE_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

atau sebaliknya

$$E_0E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\Diamond$

Perhatikan teorema berikut ini, yang menetapkan hubungan antara keterbalikan, sistem linear homogen, bentuk baris-eselon tereduksi dan matriks elementer yang hasilnya sangat penting.

TEOREMA 1.5.3 *Jika A matriks persegi pernyataan berikut ekuivalen, yaitu semua benar atau semua salah*

a. A mempunyai invers

b. $A\overline{x} = \overline{0}$ hanya mempunyai penyelesaian trivial

c. Bnetuk baris eselon tereduksi dari A adalah I

d. A dapat dinyatakan dalam perkalian beberapa matriks elementer

Bukti:

Akan dibuktikan sesuai urutannya yaitu $a \to b \to c \to d \to a$

$a \to b$

Jika A mempunyai invers, maka $A\overline{x} = \overline{0}$

Andaikan invers dari A adalah A^{-1}, maka kedua sisi kalikan dengan A^{-1}, sehingga

$$\begin{aligned} A^{-1}A\overline{x} &= A^{-1}\overline{0} \\ \overline{x} &= \overline{0} \end{aligned}$$

jadi penyelesaiannya $A\overline{x} = \overline{0}$ adalah penyelesaian trivial.

$b \to c$

Jika $A\overline{x} = \overline{0}$ mempunyai penyelesaian trivial, maka bentuk baris eselon tereduksi dari A adalah I

Untuk menyelesaikan sistem linear homogen tersebut, gunakan eliminasi Gauss-Jordan, yaitu buat matriks diperbesar kemudian lakukan OBE, maka akan terbentuk matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kembalikan ke bentuk semula maka matriks A hasil OBE tersebut adalah bentuk baris eselon tereduksi.

$c \rightarrow d$
Jika bentuk baris eselon tereduksi dari A adalah I, maka A dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberap matriks elementer

Pada pembuktian sebelumnya, jika pada matriks A dikenai OBE maka akan menjadi I, padahal setiap satu OBE adalah matriks elementer, sehingga

$$E_k \cdots E_3 E_2 E_1 A = I$$

dan setiap matriks elementer mempunyai invers, maka

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

sehingga matriks A dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa matriks elementer.

$d \rightarrow a$
Jika A dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa matriks elementer, maka A punyai invers

Dari hasil kali yang terakhir, maka matriks A memang punya invers. $\Diamond$

Dari Teorema 1.5.3, dapat digunakan untuk mencari invers dari suatu matriks persegi misal A, yaitu dengan cara melakukan serangkaian OBE pada matriks A dan juga pada matriks I, sampai dengan matriks A menjadi matriks I, maka matriks I akan menjadi A^{-1}. Secara singkat dapat digambar sebagai berikut

$$(A : I)\; OBE\; (I : A^{-1})$$

CONTOH 1.5.5 Carilah invers dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Gabungkan matriks A dengan matriks I, kemudian lakukan OBE sedemikian hingga matriks A menjadi I dan matriks I menjadi A^{-1}, seperti dibawah ini

$$(A : I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{B_3 - B_1}{\overset{B_2 - B_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & : & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{B_3 - 3B_1}{\overset{B_1 - B_2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & : & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{B_1 + B_3}{\overset{\substack{B_2 - B_3 \\ B_3(\frac{1}{2})}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (I : A^{-1})$$

Jadi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

1.6 Matriks Diagonal, Segitiga dan Simetris

Pada bagian ini akan dibahas sedikit tenatang jenis dari suatu matriks, yaitu matriks diagonal, segitiga dan simetris dan sifat-sifat dari matriks tersebut.

□ **Matriks Diagonal**

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua anggotanya nol semua kecuali pada diagonal utama yang semuanya tidak harus nol. Beberapa contoh matriks diagonal dibawah ini

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Secara umum, matriks diagonal dengan ukuran n dilambangkan dengan D_n, ditulis

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal mempunyai invers, yaitu

$$D_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

sehingga $DD^{-1} = D^{-1}D = I$, sedangkan perkalian atau pangkat dari matriks diagonal dapat ditulis dengan

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}$$

CONTOH 1.6.1 Jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

maka

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \qquad A^{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

Sekarang cobalah mengalikan matriks diagonal dengan matriks sebarang, kemudian kalikan matriks sebarang dengan matriks diagonal. Apa yang dapat saudara simpulkan dari dua perkalian matriks tersebut.

□ Matriks Segitiga

Ada dua macam matriks segitiga, yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang semua anggotanya dibawah diagonal utama semuanya nol, sedangkan matriks segitiga bawah kebalikannya. Atau dengan pernyataan dibawah, yaitu

- Matriks segitiga atas $A = [a_{ij}]$ jika dan hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$, sedangkan
- Matriks segitiga bawah $B = [b_{ij}]$ jika dan hanya jika $b_{ij} = 0$ untuk $i < j$

CONTOH 1.6.2 Tinjau dua matiks segitiga atas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriks A mempunyai invers, yaitu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Sedangkan matriks B tidak mempunyai invers (Buktikan sendiri) dan jika kedua matriks tersebut dikalikan

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

juga merupakan matriks segitiga atas, bagaimana kalau kedua matriksnya adalah matriks segitiga bawah $\Diamond$

□ Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks persegi A yang mempunyai sifat $A^T = A$. Beberapa matriks dibawah ini adalah matriks simetris, periksalah

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 1.6.1 *Jika A dan B adalah matriks simetris dengan ukuran yang sama, dan jika k adalah skalar, maka*

1. *A^T juga simetris*
2. *$A + B$ dan $A - B$ simetris*
3. *kA adalah simetris*

dalam hal ini tidak dibuktikan (buktikan sendiri). Contoh berikut yang akan meyakinkan teorema diatas

CONTOH 1.6.3 Dimisalkan dua matriks, yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

maka

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

semuanya simetris sesuai dengan teorema diatas $\Diamond$

TEOREMA 1.6.2 *Jika A matriks simetris yang mempunyai invers, maka A^{-1} juga simetris*

Bukti:
Dengan menganggap A simetris dan mempunyai invers, dan $A = A^T$, maka

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

yang merupakan matriks simetris.

Jika A matriks berukuran sebarang, maka hasil kali dari AA^T atau A^TA adalah suatu matriks persegi yang simetris.

CONTOH 1.6.4 Pandang matriks A berukuran 2×3, yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

maka

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 19 \\ 19 & 38 \end{pmatrix}$$

dan

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 13 & 21 \\ -7 & 21 & 34 \end{pmatrix}$$

Perhatikan hasil kalinya $\diamondsuit$

Dan jika A adalah matriks persegi, maka perhatikan teorema dibawah ini

TEOREMA 1.6.3 *Jika A matriks yang mempunyai invers, maka AA^T dan A^TA juga mempunyai invers.*

Modul 2

Determinan

Pendahuluan

Pada Modul ini akan dibahas materi yang berkaitan dengan determinan atau tepatnya fungsi determinan yang sangat erat hubungannya dengan sistem persamaan linear atau biasa disingkat dengan sistem linear. Kemudian akan dibahas atau dikenalkan bagaimana mendapat invers dari suatu matriks yang mempunyai invers.

Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa menguasai atau memahami fungsi determinan, cara mencarinya dan mendapat invers dari suatu matriksyan gerat hubungannya dengan penyelesaian SPL.

Tujuan Instruksional Khusus

Mhs dapat mengetahui fungsi detreminan dan cara menghitungnya, begitu juga mencari invers, secara khusus diharapkan :

1. Memahami pengertian fungsi determinan
2. Memahami perhitungan determinan dan sifat-sifatnya
3. Menyelesaikan SPL dengan berbagai cara

2.1 Fungsi Determinan

Sebelum memepelajari fungsi determinan, harus kenal terlebih dahulu tentang permutasi. Perhatikan definisi dibawah ini

DEFINISI 2.1.1 *Permutasi suatu himpunan bilangan bulat* $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ *adalah suatu susunan bilangan-bilangan bulat dalam suatu urutan tanpa pengulangan*

Akan lebih jelas, perhaqtikan contoh dibawah ini

CONTOH 2.1.1 Ada enam permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3\}$, permutasi tersebut adalah

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

$\Diamond$

CONTOH 2.1.2 Ada 24 permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, 4\}$, permutasi tersebut adalah

$$(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2)$$

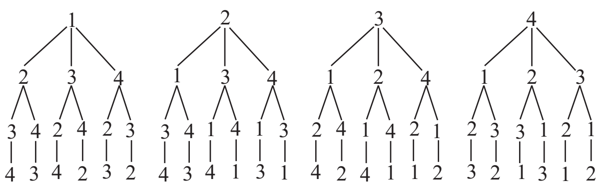
$$(2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3), (2, 3, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (2, 4, 3, 1)$$

$$(3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1), (3, 4, 2, 1), (3, 4, 1, 2)$$

$$(4, 1, 2, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 2, 3, 1), (4, 2, 1, 3), (4, 3, 2, 1), (4, 3, 1, 2)$$

$\Diamond$

Metode yang lebih mudah, yaitu dengan menggunakan pohon permutasi, seperti pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 Permutasi Empat

Dari contoh diatas, ada 24 permuatasi dari $\{1, 2, 3, 4\}$. Hasil tersebut merupakan perkalian dari posisi, yaitu posisi pertama terdiri dari empat, posisi kedua terdiri dari tiga, posisi ketiga terdiri dari dua dan posisi ke-empat hanya satu atau dapat ditulis

$$permutasi - empat = 4.3.2.1 = 4! = 24$$

Untuk permutasi n bilangan yang berbeda, dapat dicari dengan cara yang sama, yaitu

$$permutasi - n = n.(n-1).\cdots.3.2.1 = n!$$

Selanjutnya akan dibahas tentang pembalikan. Pembalikan adalah suatu urutan bilangan besar mendahului bilangan yang lebih kecil. Sedangkan jumlah pembalikan adalah banyaknya bilangan yang lebih besar menadahuli bilangan yan glebih kecil. Lebih lengkapnya perhatikan contoh dibawah ini.

CONTOH 2.1.3 Hasil permutasi adalah

$$(6, 1, 4, 3, 2, 5)$$

- bilangan 6, mendahului bilangan 1, 2,3,4, dan 5, sehingga ada 5 pembalikan.
- bilangan 5, tidak mendahului
- bilangan 4, mendahului 3,2,, sehingga ada 2 pembalikan
- bilangan 3, mendahului 2, sehingga ada satu pembalikan
- bilangan 2, tidak mendahului, begitu juga bilangan 1

jadi jumlah pembalikannya adalah $5 + 2 + 1 = 8$ pembalikan $\Diamond$

Perhaitkan definisi dibawah ini

DEFINISI 2.1.2 *Jika dalam suatu permutasi terdapat jumlah pembalikan yang genap maka permutasi tersebut disebut permutasi genap, begitu juga jika terjadi jumlah pembalikan yang ganjil maka disebut dengan permutasi ganjil*

CONTOH 2.1.4 Dari Contoh 2.1.1 hasil permutasi tercantum dalam tabel berikut

Permutasi	Jumlah Pembalikan	Klasifikasi
$(1, 2, 3)$	0	genap
$(1, 3, 2)$	1	ganjil
$(2, 1, 3)$	1	ganjil
$(2, 3, 1)$	2	genap
$(3, 1, 2)$	2	genap
$(3, 2, 1)$	3	ganjil

Hasil kali dasar dari suatu matriks persegi yaitu perkalian dari semua elemen matriks terhadap elemen matriks yang lain dengan mengikuti aturan tertentu. Jika matriks tersebut berukuran $n \times n$, maka perkalian dasarnya terdiri dari n elemen yaitu

$$a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\cdots a_{n\_}$$

sedangkan banyaknya perkalian dasar adalah $n!$ yaitu banyaknya permutasi yang diisikan pada tanda setrip dan tanda positif atau negatif tergantung dari hasil pembalikan, jika permutasi genap bertanda positif dan sebaliknya permutasi ganjil betanda negatif.

Perhatikan definisi fungsi determinan berikut ini

DEFINISI 2.1.3 *Pandang matriks A matriks persegi. it Fungsi determinan A atau biasanya disingkat dengan determinan A dinyatakan dengan* **det(A)** *sebagai jumlahan hasil kali dasar beserta tanda dari A*

Akan lebih jelas perhatikan contoh-contoh berikut

CONTOH 2.1.5 Hitung determinan dari matriks persegi A berukuran 2×2, misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Perhatikan tabel berikut

Permutasi	Hasil Kali Dasar	Pembalikan	Hasil Kali Dasar Bertanda
(1,2)	$a_{11}a_{22}$	genap	$a_{11}a_{22}$
(2,1)	$a_{12}a_{21}$	ganjil	$-a_{12}a_{21}$

sehingga

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$\Diamond$

Sekarang perhatikan contoh untuk matriks berukuran 3×3 berikut ini

CONTOH 2.1.6 Hitung determinan dari matriks persegi A berukuran 3×3, misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Perhatikan tabel berikut

Permutasi	Hasil Kali Dasar	Pembalikan	Hasil Kali Dasar Bertanda
(1,2,3)	$a_{11}a_{22}a_{33}$	genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(1,3,2)	$a_{11}a_{23}a_{32}$	ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
(2,1,3)	$a_{12}a_{21}a_{33}$	ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
(2,3,1)	$a_{12}a_{23}a_{31}$	genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
(3,1,2)	$a_{13}a_{21}a_{32}$	genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
(3,2,1)	$a_{13}a_{22}a_{31}$	ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

sehingga

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad -(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})
\end{aligned}
$$

$\Diamond$

Contoh yang lain

CONTOH 2.1.7 Hitung determinan dari matriks persegi A berukuran 3×3, misalkan

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}
$$

Perhatikan tabel berikut

Permutasi	Hasil Kali Dasar	Pembalikan	Hasil Kali Dasar Bertanda
(1,2,3)	2.1.3	genap	6
(1,3,2)	2.5.2	ganjil	-20
(2,1,3)	4.4.3	ganjil	-48
(2,3,1)	4.5.6	genap	120
(3,1,2)	3.4.2	genap	24
(3,2,1)	3.1.6	ganjil	-18

$$
det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 64
$$

$\Diamond$

2.2 Cara Lain Menghitung Determinan

Pada bagian ini akan dikenalkan cara menghitung determinan dari suatu matriks. Cara ini merupakan gabungan dari modul sebelumnya yaitu mereduksi suatu matriks sedemikian hingga matriks tersebut menjadi bentuk baris eselon tereduksi. Metode ini akan mempermudah mencai nilai determinan untuk ukuran yang besar. Perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 2.2.1 *Pandang matriks persegi A,*

a. Jika A mempunyai sebuah atau lebih baris (kolom) nol semua, maka $det(A) = 0$

b. $det(A) = det(A^T)$

Bukti:

(a) Untuk mencari nilai dari suatu determinan, hasil kali dasar selalu memuat salah satu elemen dari baris atau kolom, sehingga perkalian dasaarnya selalu memuat nol. Jadi nilai determinannya selalu nol

(b) Sesaui dengan (a) pada hasil kali dasar selalu memuat salsh satu elemen, maka dengan demikian nilai determinan dari A akan sama dengan A^T.

Teorema dibawah ini akan mempermudah perhitungan dari suatu matriks, yaitu

TEOREMA 2.2.2 *Jika matriks persegi A adalah matriks segitiga atas atau bawah, maka $det(A)$= hasil kali elemen pada diagonalnya*

Bukti:
telah dijelaskna diatas bahwa nilai determinan merupakan perkalian dasar yang selalu memuat salah satu elemen pada setiap baris atau kolom, oleh karena itu pada matriks segitiga atas atau bawah untuk baris dan kolom yan gtidak sama nilai elemennya nol, sedangkan pada baris atau kolom yang sama elemennya tidak sama dengan nol, sehingga nilai determinan dari matriks segitiga atas atau bawah hanyalah perkalian elemen pada diagonal utamanya saja.

CONTOH 2.2.1 Hitung determinan dari

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(3)(4) = -72$$

$\Diamond$

Teorema dibawah ini menunjukkan bagaimana peran dari OBE yang sudah dibahas pada modul sebelumnya memunyai peran untuk menentukan nilai determinan

TEOREMA 2.2.3 *Pandang matriks persegi A berukuran $n \times n$*

(a) Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari matriks A yang dilakukan dengan OBE/OKE tunggal yaitu dengan mengalikan dengan k pada salah satu baris atau kolom dari A, maka $det(B) = kdet(A)$

(b) Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari matriks A dengan OBE/OKE yaitu menukarkan baris atau kolom dari A, maka $det(B) = -det(A)$

(c) Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari matriks A dengan OBE/OKE yaitu penggandaan dari baris atau kolom dari A kemudian ditambah atau dikurang pada baris atau kolom yang lain, maka $det(B) = det(A)$

CONTOH 2.2.2 Hitung matriks B yang merupakan baris kedua dari matriks A dikalikan dengan tiga dengan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

dan matriks

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 15 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

maka determinan

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 15 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3$$

sedangkan

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

jadi $det(B) = 3det(A)$. $\diamondsuit$

CONTOH 2.2.3 matriks C adalah matriks A pada Contoh 2.2.2 dengan menukarkan baris 1 dengan baris 3, maka

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

maka

$$det(C) = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

atau $det(C) = -det(A)$. $\Diamond$

CONTOH 2.2.4 matriks D adalah matriks A pada Contoh 2.2.2 dengan baris kedua dikurangi dua kali baris pertama, maka

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

maka

$$det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

atau $det(D) = det(A)$. $\Diamond$

Dengan berpedoman pada Teorema 2.2.3 dan beberapa contoh, maka untuk menghitung determinan dari suatu matriks, lakukan OBE sehingga menjadi bentuk baris eselon, kemudian gunakan Teorema 2.2.2, maka akan mudah mencari nilai dari suatu determinan. Perhatikan teorema dibawah ini, yang akan memudahkan perhitungan determinan.

TEOREMA 2.2.4 *Jika matriks persegi A mempunyai dua baris atau dua kolom yang sebanding, maka $det(A) = 0$*

CONTOH 2.2.5 Hitung determinan dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \\ 1 & 6 & 10 & 66 \end{pmatrix}$$

untuk menghitung determinan dari matriks A, lakukan OBE, sedemikian hingga matriksnya menjadi bentuk baris eselon, seperti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \\ 1 & 6 & 10 & 66 \end{pmatrix} \begin{array}{c} B_2 - B_1 \\ B_3 - B_1 \\ B_3 - B_1 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \\ 0 & 5 & 9 & 60 \end{pmatrix} \begin{array}{c} B_3 - 3B_2 \\ B_4 - 5B_2 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$B_4 + \frac{1}{2}B_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$

maka

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} = (1)(1)(2)(23) = 46$$

$\diamondsuit$

Contoh lain dengan menggunakan teorema yang terakhir

CONTOH 2.2.6 Hitung determinan dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \\ 6 & 6 & 6 & 36 \end{pmatrix}$$

untuk menghitung determinan dari matriks A, lakukan OBE, sedemikian hingga matriksnya menjadi bentuk baris eselon, seperti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \\ 6 & 6 & 6 & 36 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} B_2 - B_1 \\ B_3 - B_1 \\ B_3 - 6B_1 \\ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

karena ada satu baris yaitu baris terakhir mempunyai nilai nol semua sesuai dengan Teorema 2.2.1, maka

$$det(A) = 0$$

$\diamondsuit$

2.3 Sifat Fungsi Determinan

Pada bagian ini akan dibahas tentang sifat dari fungsi determinan, dari sifat fungsi determinan tersebut diharapkan wawasan mengenai hubungan antara matriks persegi dan determinannya. salah satunya adalah ada tidak suatu invers matriks persegi dengan menguji determinannya. Perhatikan teorema dibawah ini

TEOREMA 2.3.1 *Misal A, B dan C adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ yang berbeda di salah satu barisnya, misal di baris ke-r yang berbeda. Pada baris ke-r matriks C merupakan penjumlahan dari matriks A dan B, maka*

$$det(C) = det(A) + det(B)$$

Begitu juga pada kolomnya

CONTOH 2.3.1 Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

perhatikan, hanya pada baris ketiga saja yang berbeda. Dengan menggunakan Teorema 2.3.1, maka

$$det(C) = det(A) + det(B)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$-6 = (-2) + (-4)$$

$\Diamond$

Contoh diatas adalah penjumlahan dari suatu determinan dengan syarat tertentu, sekarang, bagaimana dengan perkalian. Perhatikan lemma dibawah ini

LEMMA 2.3.2 *Jika matriks persegi A dan matriks dasar E denganukuran yang sama, maka berlaku*

$$det(EB) = det(E)det(B)$$

Bukti: Telah dipelajari pada modul sebelumnya, bahwa matriks dasar E, jika dikalikan dengan suatu matriks, maka seolah matriks tersebut dilakukan dengan OBE yang sama, jadi

$$B \ \widetilde{OBE} \ B' = EB$$

dalam hal ini ada beberapa kasus, yang pertama, jika OBEnya adalah mengalikan salah satu baris dengan k, maka

$$det(EB) = det(E)det(B) = kdet(B)$$

sedangkan kasus yang lain, menukarkan baris atau menambah pada baris yang lain akan menghasilkan seperti kasus pertama.

CONTOH 2.3.2 Matriks-matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan Lemma 2.3.2, maka

$$det(EA) = det(E)det(A)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 3. -6 = -18$$

$\lozenge$

Perhatikan teorema dibawah ini

TEOREMA 2.3.3 *Suatu matriks persegi A mempunyai invers jika dan jika $det(A) \neq 0$*

Bukti: Dengan memperhatikan, bahwa suatu matriks persegi jika dilakukan OBE, maka ada dua kemungkinan yaitu mengandung baris yang nol semua atau matriks identitas. Jika matriks elementer dikalikan dengan suatu matriks persegi hasil sama dengan matriks tersebut dilakukan satu OBE. Dan suatu matriks jika mengandung baris atau kolom yang nol semua, maka determinan matriks tersebut adalah nol. Jadi yang mempunyai invers pasti nilai determinannya tidak nol.

Perhatikan teorema dibawah yang mendukung Lemma 2.3.2, yaitu

TEOREMA 2.3.4 *Jika A dan B dua matriks persegi berukuran sama, maka*

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Bukti: Dengan mengasumsikan salah satu matriks tersebut sebagai perkalian dari matriks elementer, misal matriks A, yaitu

$$A = E_1E_2E_3\cdots E_r$$

sedangkan dengan menggunakan Lemma 2.3.2, menjadi

$$AB = E_1E_2E_3\cdots E_rB$$

maka

$$det(AB) = det(E_1)det(E_2)det(E_3)\cdots det(E_r)det(B)$$

jadi

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

CONTOH 2.3.3 Pandang matriks dibawah ini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 18 & 13 \\ 13 & 22 \end{pmatrix}$$

dengan menghitung, maka

$$det(A) = -1, \qquad det(B) = -7, \qquad \text{maka} \qquad det(AB) = 7$$

sesuai dengan Teorema 2.3.4

Dari beberapa teorema diatas, jika dihubungkan akan menghasilkan teorema berikut

TEOREMA 2.3.5 *Jika matriks persegi A mempunyai invers, maka*

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Bukti: Karena $A^{-1}A = I$, maka $det(A^{-1}A) = det(I)$, sedangkan menurut Teorema 2.3.4, maka $det(A^{-1})det(A) = det(I) = 1$ dan $det(A) \neq 0$, sehingga teorema tersebut terbukti.

2.4 Kofaktor dan Matriks Invers

Pada bagian ini akan dibahas tentang kofaktor dan cara mencari invers dengan kofaktor. Ada beberapa hal yang harus diperhatikan sebelumnya, seperti minor, perluasan kofaktor dan invers dari suatu matriks. Perhatikan definisi dibawah ini

DEFINISI 2.4.1 *Jika matriks persegi A, maka minor anggota a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari sub-matriks dari matriks awal dengan menghilangkan baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$, sedangkan kofaktor anggota a_{ij} ditulis $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$*

CONTOH 2.4.1 Pandang matriks persegi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Minor anggota a_{11} adalah

$$M_{11} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

Sedangkan kofaktor a_{ij} adalah

$$C_{ij} = (-1)^{1+1} M_{11} = 16$$

Untuk Minor dan kofaktor yang lain, adalah

$$M_{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 6, \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -6$$

$\Diamond$

Perluasan kofaktor adalah salah satu cara untuk menghitung determinan dengan menggunakan bantuan kofaktor, perhatikan definisi berikut

DEFINISI 2.4.2 *Determinan dari matriks persegi A dapat dihitung dengan mengalikan anggota-anggota baris atau kolom dengan kofaktornya dan menjumlahkannya. Untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$, perluasan kofaktor dengan baris ke$-i$, adalah*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

dan perluasan kofaktor dengan kolom ke$-j$, adalah

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

CONTOH 2.4.2 Hitung determinan dari matriks pada Contoh 2.4.1

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2$$

sedangkan dengan perluasan kofaktor pada baris ke-1

$$det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.6 - 1.6 + 1.2 = 2$$

atau dengan perluasan kofaktor pada kolom ke-2

$$det(A) = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1.6 + 2.8 - 4.2 = 2$$

$\Diamond$

Sedangkan yang dimaksud dengan adjoint matriks dapat dilihat pada definisi berikut ini

DEFINISI 2.4.3 *Jika matriks persegi A dengan ukuran n dan C_{ij} adalah kofaltor dari matriks A, maka matriks kofaktor dari A ditulis*

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

transpose dari matriks tersebut dinamakan $adjoint(A)$ ditulis $Adj(A)$

CONTOH 2.4.3 Cari $Adj(A)$ dari matriks A pada conoth diatas Kofaktor dari A, adalah

$$\begin{array}{ccc} C_{11} = 6 & C_{12} = -6 & C_{13} = 2 \\ C_{21} = -5 & C_{22} = 8 & C_{23} = -3 \\ C_{31} = 1 & C_{32} = -2 & C_{33} = 1 \end{array}$$

sehingga matriks kofaktornya adalah $\Diamond$

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

dan $adjoint$ A adalah

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk mencari invers dari matriks persegi yang menggunkan matriks adjoint, perhatikan teorem berikut ini

TEOREMA 2.4.4 *Jika matriks persegi A mempunyai invers, maka*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

Bukti:

Dengan menggunakan perluasan kofaktor dapat dengan mudah dibuktikan.

CONTOH 2.4.4 Dari contoh sebelumnya, bahwa persegi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

dan

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad det(A) = 2$$

maka

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

Dengan menggunakan dari pencarian invers dan perluasan kofaktor dapat dicari penyelesaian SPL dengan menggunakan determinan, perhatikan teorema dibawah ini

TEOREMA 2.4.5 *Jika* $A\overline{x} = \overline{b}$ *merupakan SPL dengan* n *variabel dan* $det(A) \neq 0$*, maka SPL tersebut mempunyai penyelesaian*

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \qquad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \cdot, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

dengan $A_j,\ j = 1, \cdots, n$ *adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota matriks* A *pada kolom ke*$-j$ *dengan* $\overline{b}$*, aturan tersebut dinamakan dengan* ***Aturan Cramer***

Bukti:

Dengan menggunakan definisi invers yang menggunakan adjoint matriks, maka nilai setiap variabel sesuai dengan teorema di atas.

CONTOH 2.4.5 Gunakan aturan Carmer untuk menyelesaikan SPL berikut

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_1 & + & 3x_3 & = & 14 \\ x_1 & + & 4x_1 & + & 9x_3 & = & 36 \end{array}$$

Karena ada tiga varibel bebas, maka ada matriks $A,\ A_1,\ A_2$ dan A_3, yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 36 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 1 & 36 & 9 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 14 \\ 1 & 4 & 36 \end{pmatrix}$$

maka

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{2}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{6}{2} = 2$$

Modul 3

Vektor dan Operasinya

Pendahuluan

Pada Modul ini akan dibahas materi yang berkaitan dengan vektor dan ruang vektor. Dimulai dari vektor pada dimensi dua, vektor di dimensi tiga dilanjutkan pada vektor di dimensi n, tidak terlepas pula operasi-operasi yang berlaku pada vektor. Pada bagian belakang akan dikupas tuntas tentang ruang vektor dan operasi-operasi yang berlaku pada ruang vektor.

Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa menguasai atau memahami tentang vektor pada dimensi dua, tiga dan vektor di dimensi n, cara menentukan ruang vektor, operasi-operasi yang berlaku dan sifat-sifat dari ruang vektor.

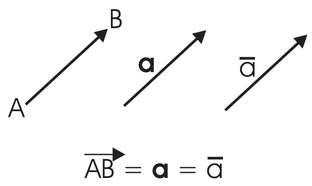
Tujuan Instruksional Khusus

Mahasiswa dapat mengetahui vektor pada dimensi dua, tiga dan n, begitu juga operasi dan sifatnya, secara khusus diharapkan :

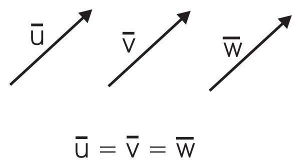
1. Memahami pengertian vektor secara gemetris dan analitis
2. Memahami operasi dan operator yang berlaku pada vektor
3. Memahami ruang vektor Euclidean pada R^n
4. Menentukan matriks transformasi antar ruang
5. Mengerti sifat-sifat transformasi linear

3.1 Pengantar Vektor

Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai arah, dan ***skalar*** adalah besaran yang tidak mempunyai arah. Kedua besaran tersebut banyak digunakan di Fisika dan Teknik. Vektor dapat disajikan secara geometris sebagai ruas garis berarah, arah panah menunjukan arah vektor dan panjang vektor menunjukan besaran vektor. Vektor dapat ditulis dengan huruf kecil tebal atau tanda bar. Seperti pada Gambar 3.1.



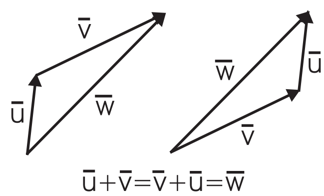
Gambar 3.1 Penulisan Vektor



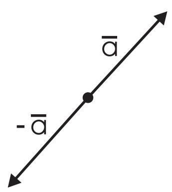
Gambar 3.2 Vektor Ekuivalen

Sebelum memepelajari vektor lebih detail, perhatikan definisi dibawah ini

> DEFINISI 3.1.1 *Jika $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ adalah dua vektor sebarang, maka jumlah $\overline{u}+\overline{v}$ adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut: Letakkan vektor $\overline{v}$ sedemikian hingga titik pangkalnya bertautan dengan titik ujung $\overline{v}$. Vektor $\overline{u}+\overline{v}$ disajikan oleh anak panah dari titik pangkal $\overline{u}$ ke titik ujung $\overline{v}$.*



Gambar 3.3 Penjumlahan Vektor



Gambar 3.4 Vektor Negatif

Vektor-vektor yang mempunyai panjang dan arahnya sama, seperti pada Gambar 3.2 disebut *ekuivalen*, sedangkan penjumlahan dua vektor sesuai dengan definisi diatas dapat dilihat pada Gambar 3.3 yang hasilnya merupakan diagonal jajaran genjang yang dibangun oleh dua vektor. Vektor yang panjangnya nol dan arahnya sebarang disebut dengan ***vektor nol*** dan dinyatakan dengan $\overline{0}$, maka berlaku

$$\overline{0}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{0}=\overline{v}$$

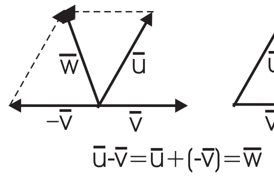
Jika vektor $\overline{v}$ sebarang tak nol, maka $-\overline{v}$, negatif dari $\overline{v}$ didefinisikan sebagai vektor yang besarnya sama dengan $\overline{v}$, tetapi arahnya belawanan, seperti pada Gambar 3.4. Oleh karena itu berakibat

$$\overline{v}+(-\overline{v})=0$$

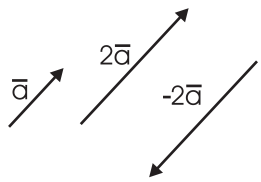
sehingga, perhatikan definisi berikut

> DEFINISI 3.1.2 *Jika $\overline{v}$ dan $\overline{w}$ adalah dua vektor sebarang, maka selisih $\overline{w}$ dari $\overline{v}$ didefinisikan sebagai*
> $$\overline{v} - \overline{w} = \overline{v} + (-\overline{w})$$

Untuk mendapatkan nilai selisih dari $\overline{v} - \overline{w}$ tanpa melihat $-\overline{w}$, cukup titik pangkal vektor hasil pada titik ujung $\overline{w}$ dan titik ujung vektor hasil pada titik ujung vektor $\overline{v}$, vektor yang terbentuk adalah vektor selisih. Secara geometris dapat dilihat dengan jelas seperti pada Gambar 3.5. Perhatikan definisi berikut ini



Gambar 3.5 Pengurangan Vektor



Gambar 3.6 Perkalian Vektor

> DEFINISI 3.1.3 *Jika $\overline{v}$ vektor tak-nol dan k skalar sebarang tak-nol, maka hasil kali $k\overline{v}$ didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya $|k|$ kali panjang $\overline{v}$ dan arahnya sesuai dengan arah $\overline{v}$ jika $k > 0$ dan arahnya kebalikan dari $\overline{v}$ jika $k < 0$. Didefiniskan pula $k\overline{v} = 0$ jika $k = 0$ atau $\overline{v} = 0$.*

akan lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 3.6. Suatu vektor yang berbentuk $k\overline{v}$ dinamakan penggandaan skalar dari $\overline{v}$.

□ Vektor di sistem Koordinat

Vektor dapat digambarkan dalam sistem koordinat di dimensi dua atau dimensi tiga, tetapi tidak dapat digambarkan untuk dimensi lebih dari tiga. Pandang $\overline{v}$ vektor sebarang, jika digambarkan pada sistem koordinat bidang atau ruang, titik pangkal berada pada titik asal. Koordinat (v_1, v_2) dari titik ujung $\overline{v}$ disebut komponen $\overline{v}$ dan ditulis

$$\overline{v} = (v_1, v_2)$$

sedangkan untuk koordinat ruang, komponennya adalah (v_1, v_2, v_3) dan ditulis

$$\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Secara umum definisi vektor seperti dibawah ini

DEFINISI 3.1.4 *Jika n adalah bilangan bulat positif, maka ganda-n berurut adalah sederetan n bilangan real ($a_1, a_2, \cdots, a_n$). Himpunan semua ganda-n berurut disebut ruang berdimensi-n dan dinyatakan dengan $\mathbb{R}^n$*

Dengan definisi tersebut memungkinkan operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian skalar, oleh karena itu perhatikan definisi berikut ini

DEFINISI 3.1.5 *Dua vektor $\overline{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ dan $\overline{v} = v_1, v_2, \cdots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$ disebut **sama** jika*

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \cdots, u_n = v_n$$

sedangkan jumlah $\overline{u} + \overline{v}$ didefinisikan dengan

$$\overline{u} + \overline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n)$$

*dan jika k skalar, maka **perkalian skalar** $k\overline{u}$ didefinisikan dengan*

$$k\overline{u} = (ku_1, ku_2, \cdots, ku_n)$$

CONTOH 3.1.1 Jika diketahui $\overline{v} = (2, 3)$ dan $\overline{w} = (2, 3)$, maka kedua vektor tersebut adalah ekuivalen atau sama, sebab

$$v_1 = w_1 = 2 \qquad \text{dan} \qquad v_2 = w_2 = 3$$

$\Diamond$

CONTOH 3.1.2 Jika diketahui $\overline{x} = (2, 3, 4)$ dan $\overline{y} = (2, 3, 4)$, maka kedua vektor tersebut adalah ekuivalen atau sama, sebab

$$x_1 = y_1 = 2, \qquad x_2 = y_2 = 3 \qquad \text{dan} \qquad x_3 = y_3 = 4$$

$\Diamond$

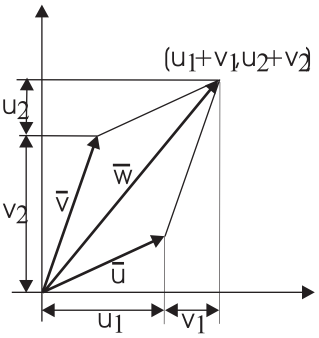
Operasi penjumlahan dan perkalian vektor dengan skalar, mudah dilakukan dalam bentuk komponen. Jika dua vektor di koordinat bidang dijumlahkan, misal $\overline{v} = (v_1, v_2)$ dan $\overline{w} = (w_1, w_2)$, maka jumlahannya adalah

$$\overline{v} + \overline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

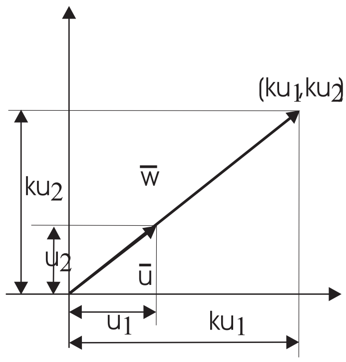
begitu juga pada koordinat ruang

$$\overline{v} + \overline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

lebih jelasnya lihat Gambar 3.7



Gambar 3.7 Penjumlahan Vektor



Gambar 3.8 Perkalian Vektor

CONTOH 3.1.3 Jika diketahui $\overline{v} = (2,3)$ dan $\overline{w} = (4,6)$, maka jumlah kedua vektor tersebut adalah

$$\overline{v} + \overline{w} = (2+4, 3+6) = (6,9)$$

begitu juga selisih kedua vektor adalah

$$\overline{w} - \overline{v} = (4-2, 6-3) = (2,3)$$

$\Diamond$

CONTOH 3.1.4 Jika diketahui $\overline{x} = (2,3,4)$ dan $\overline{y} = (5,3,7)$, maka jumlah kedua vektor tersebut adalah

$$\overline{x} + \overline{y} = (2+5, 3+3, 4+7) = (7,6,11)$$

begitu juga selisih kedua vektor adalah

$$\overline{x} - \overline{y} = (2-5, 3-3, 4-7) = (-3,0,-3)$$

$\Diamond$

Perkalian vektor dengan skalar seperti pada Definisi 3.1.3 dan 3.1.5, sebarang vektor $\overline{v}$ dan skalar k, pada koordinat bidang adalah

$$k\overline{v} = (kv_1, kv_2)$$

dan pada koordinat ruang adalah

$$k\overline{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

lebih lengkap dapat dilihat pada Gambar 3.8

CONTOH 3.1.5 Jika diketahui $\overline{v} = (2, 3)$ dan skalar $k = 3$, maka perkalian vektor dengan skalar adalah

$$k\overline{v} = (3.2, 3.3) = (6, 9)$$

$\Diamond$

CONTOH 3.1.6 Jika diketahui $\overline{x} = (2, 3, 4)$ dan skalar $k = 4$, maka perkalian adalah

$$k\overline{x} = (4.2, 4.3, 4.4) = (8, 12, 16)$$

$\Diamond$

CONTOH 3.1.7 Jika diketahui $\overline{x} = (2, 3, 4)$, $\overline{y} = (5, 3, 7)$ dan skalar $k = 4$, maka perkalian dan penjumlahan adalah

$$k\overline{x} = (4.2, 4.3, 4.4) = (8, 12, 16)$$

$\Diamond$

Dari beberapa contoh diatas, dapat ditarik sebuah teorema seperti dibawah ini

TEOREMA 3.1.6 *Jika* $\overline{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_3)$ *dan* $\overline{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ *adalah vektor-vektor di* $\mathbb{R}^n$ *dan* $k,\ l$ *adalah skalar, maka*

a. $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$

b. $\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w}$

c. $\overline{u} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{u} = \overline{u}$

d. $\overline{u} + (-\overline{u}) = \overline{0}$ *artinya* $\overline{u} - \overline{u} = \overline{0}$

e. $k(l\overline{u}) = (kl)\overline{u}$

f. $k(\overline{u} + \overline{v}) = k\overline{u} + k\overline{v}$

g. $(k + l)\overline{u} = k\overline{u} + l\overline{u}$

h. $1\overline{u} = \overline{u}$

Buktikan teorema diatas dengan seksama sebagai latihan.

3.2 Panjang Vektor

Setelah mempelajari dengan tuntas Kegiatan belajar pertama, lanjutkan dengan menghitung panjang dari vektor, perhatikan definisi dibawah ini

DEFINISI 3.2.1 *Norm atau Panjang dari suatu* $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ *didefinisikan*

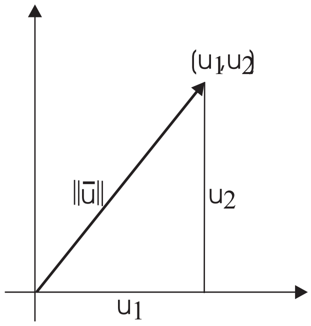
$$\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

jika $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$*, lihat Gambar 3.9*

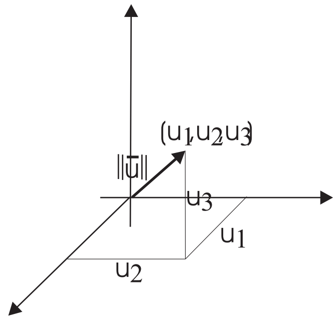
$$\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

jika $\overline{u} \in \mathbb{R}^3$*, lihat Gambar 3.10*

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$



Gambar 3.9 Panjang Vektor di $\mathbb{R}^2$



Gambar 3.10 Panjang Vektor di $\mathbb{R}^3$

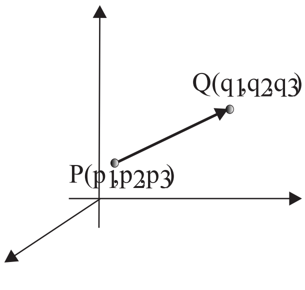
Sedangkan definisi jarak dari dua buah titik, perhatikan definisi berikut

DEFINISI 3.2.2 *Jika titik* $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ *dan* $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ *adalah titik di* $\mathbb{R}^n$*, maka Distance atau Jarak kedua titik tersebut adalah panjang dari vektor* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *seperti pada Gambar 3.11, karena*

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \cdots, q_n - p_n)$$

maka jarak kedua titik diatas adalah

$$d = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}$$



Gambar 3.11 Jarak antara titik P dan titik Q

CONTOH 3.2.1 Hitung panjang vektor $\overline{v} = (3, 4)$ dan hitung jarak titik $P(2, 3)$ dan titik $Q(5, 6)$ di $\mathbb{R}^2$, panjang vektor $\overline{v}$ adalah

$$\|\overline{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

dan jarak kedua titik adalah

$$d = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

CONTOH 3.2.2 Hitung panjang vektor $\overline{v} = (2, 3, 4)$ dan hitung jarak titik $P(5, 3, 4)$ dan titik $Q(5, 6, -2)$ di $\mathbb{R}^3$, panjang vektor $\overline{v}$ adalah

$$\|\overline{v}\|\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

dan jarak kedua titik adalah

$$d = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(5-5)^2 + (6-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Perhatikan contoh terakhir ini

CONTOH 3.2.3 Hitung panjang hasil skalar dengan vektor, misal $\overline{v} = (2, 3, 4)$ dan hitung $k = 3$, maka panjang hasil kali vektor adalah

$$\|k\overline{v}\| = |k|\|\overline{v}\| = 3\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = 3\sqrt{50} = 15\sqrt{2}$$

Dengan memperhatikan contoh-contoh, dapat ditarik sebuah teorema

TEOREMA 3.2.3 *Jika* $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$ *dan* k *skalar, maka berlaku*

a. $\|\overline{u}\| \geq 0$

b. $\|\overline{u}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\overline{u} = \overline{0}$

c. $\|k\overline{u}\| = |k|\|\overline{u}\|$

d. $\|\overline{u} + \overline{v}\| \leq \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$

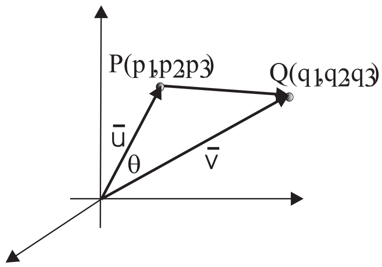
3.3 Dot Product, Proyeksi

Operasi hasil kali dalam atau *Dot Product* dari dua vektor yang posisi pangkalnya berimpit dan bersudut θ yaitu sudut yang dibangun oleh kedua vektor. Lebih jelasnya, perhatikan definisi dibawah ini

DEFINISI 3.3.1 *Jika* $\overline{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n), \overline{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ *adalah vektor-vektor di* $\mathbb{R}^n$ *dan* θ *adalah sudut antara* $\overline{u}$ *dan* $\overline{v}$*, maka hasil kali dalam Euclidean didefinisikan*

$$\overline{u}\,.\,\overline{v} = \begin{cases} \|\overline{u}\|\|\overline{v}\|\cos\theta & \textit{jika } \overline{u} \neq \overline{0} \quad \textit{dan } \overline{v} \neq \overline{0} \\ 0 & \textit{jika } \overline{u} \neq \overline{0} \quad \textit{dan } \overline{v} \neq \overline{0} \end{cases}$$

Untuk menghitung perkalian dalam perlu mengetahui sudut dari kedua vektor tersebut, jika tidak diketahui maka akan sulit menghitungnya. Oleh karena itu perlu dicari perhitungan yang lain. Pandang $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ di $\mathbb{R}^3$ seperti pada Gambar 3.12, maka dengan hukum $\cos$



Gambar 3.12 Perhitungan Hasil Kali Dalam

diperoleh

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 - 2\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|\cos\theta$$

Karena $\overrightarrow{PQ} = \overline{v} - \overline{u}$ maka dapat ditulis

$$\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|\cos\theta = \frac{1}{2}(\|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 - \|\overline{v} - \overline{u}\|^2)$$

atau

$$\overline{u} \centerdot \overline{v} = \frac{1}{2}(\|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 - \|\overline{v} - \overline{u}\|^2)$$

dengan mensubstitusikan panjang vektor, maka diperoleh

$$\overline{u} \centerdot \overline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

sehingga Definisi 3.3.1 dapat ditulis ulang dengan

DEFINISI 3.3.2 *Jika $\overline{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ adalah vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$ dan θ adalah sudut antara $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ skalar, maka hasil kali dalam Euclidean didefinisikan*

$$\overline{u} \centerdot \overline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Sehingga besar sudut antara dua vektor dapat dicari. Perhatikan contoh berikut.

CONTOH 3.3.1 Hitung besar sudut antara dua vektor $\overline{u} = (1, -2, 3, -4)$ dan $\overline{v} = (4, 3, 2, 1)$ di $\mathbb{R}^4$, hitung

$$\overline{u} \centerdot \overline{v} = 1.4 + (-2).3 + 3.2 + (-4).1 = 0$$

sedangkan

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 9 + 16} = \sqrt{30}$$

dan

$$\|\overline{v}\| = \sqrt{16 + 9 + 4 + 1} = \sqrt{30}$$

sehingga

$$\cos\theta = \frac{\overline{u} \centerdot \overline{v}}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = \frac{0}{30} = 0$$

jadi sudut antara dua vektor tersebut adalah $\frac{\pi}{2}$

Beberapa sifat yang akan dituangkan dalam teorema dibawah ini

TEOREMA 3.3.3 *Jika* $\overline{u}, \overline{v}$ *dan* $\overline{w}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *dan* k *adalah skalar, maka*

1. $\overline{u} \centerdot \overline{v} = \overline{v} \centerdot \overline{u}$
2. $(\overline{u} + \overline{v}) \centerdot \overline{w} = \overline{u} \centerdot \overline{w} + \overline{v} \centerdot \overline{w}$
3. $(k\overline{u}) \centerdot \overline{v} = k(\overline{u} \centerdot \overline{v})$
4. $\overline{v} \centerdot \overline{v} \geq 0$, *untuk* $\overline{v} \centerdot \overline{v} = 0$ *jika dan hanya jika* $\overline{v} = \overline{0}$

Bukti dari teorema tersebut dapat dipakai sebagai latihan.

Berdasarkan analogi dari definisi, teorema dan contoh, maka dapat ditarik sebuah teorema sebagai berikut

TEOREMA 3.3.4 *Jika* $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$, *maka*

$$\overline{u} \centerdot \overline{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \|\overline{u}\|^2$$

begitu juga jarak antara dua vektor tersebut adalah

$$d(\overline{u}, \overline{v}) = \|\overline{u} - \overline{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

CONTOH 3.3.2 Jika $\overline{u} = (2, 3, 4, 5)$ dan $\overline{v} = (3, 5, 1, -5)$ di $\mathbb{R}^4$, maka

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{4 + 9 + 16 + 25} = \sqrt{54}$$

dan

$$d(\overline{u}, \overline{v}) = \|\overline{u} - \overline{v}\| = \sqrt{(3-2)^2 + (5-3)^2 + (1-4)^2 + (-5-5)^2} = \sqrt{114}$$

Hubungan antara Hasil kali dalam dan panjang vektor dapat dilihat pada teorema berikut ini yang lebih dikenal dengan ***Ketaksamaan Cauchy-Schwarz*** di $\mathbb{R}^n$

TEOREMA 3.3.5 *Jika* $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$, *maka berlaku*

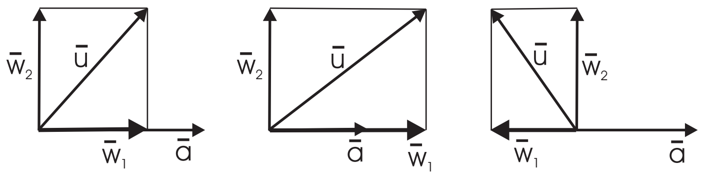
$$|\overline{u} \centerdot \overline{v}| \leq \|\overline{u}\| \|\overline{v}\|$$

□ Proyeksi Ortogonal

Sebelum dibahas tentang proyeksi suatu vektor ke vektor lain perhatikan definisi berikut ini

DEFINISI 3.3.6 *Dua vektor* $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$ *disebut ortogonal atau tegak lurus jika*

$$\overline{u} \centerdot \overline{v} = 0$$



Gambar 3.13 Komponen Vektor

Jika sebuah vektor diproyeksikan ke vektor lain, maka ada kemungkinan vektor yang diproyeksikan tersebut lebih kecil, lebih besar atau kebalikan dari vektor tempat proyeksi, lebih jelasnya perhatikan Gambar 3.13. Sebuah vektor $\overline{u}$ diproyeksikan ke vektor $\overline{a}$, maka

$$\overline{u} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 \qquad \text{atau} \qquad \overline{w}_2 = \overline{u} - \overline{w}_1$$

karena $\overline{w}_1$ sejajar dengan $\overline{a}$ dan $\overline{w}_1$ tegak lurus dengan $\overline{a}$, maka proyeksi $\overline{u}$ ke $\overline{a}$ ditulis dengan

$$\overline{w}_1 = Proy_{\overline{a}}\overline{u}$$

sehingga vektor yang tegak lurus dengan hasil proyeksinya adalah

$$\overline{w}_2 = \overline{u} - Proy_{\overline{a}}\overline{u}$$

dan besarnya vektor hasil proyeksi adalah

$$Proy_{\overline{a}}\overline{u} = k\overline{a}$$

dimana kemungkinan nilai k adalah $k > 1$, $0 < k \leq 1$ dan $k < 0$, selanjutnya, perhatikan teorema dibawah ini

TEOREMA 3.3.7 *Jika $\overline{u}$ dan $\overline{a} \neq \overline{0}$ di $\mathbb{R}^n$, maka*

$$Proy_{\overline{a}}\overline{u} = \frac{\overline{u} \cdot \overline{a}}{\|\overline{a}\|^2}\overline{a}$$

Buktikan teorema tersebut dengan seksama, kemudian perhatikan contoh dibawah ini.

CONTOH 3.3.3 Pandang $\overline{u} = (2, -1, 3)$ dan $\overline{a} = (2, 3, 4)$, carilah komponen vektor dari $\overline{u}$ yang sejajar dengan $\overline{a}$ dan carilah komponen vektor dari $\overline{u}$ yang ortogonal terhadap $\overline{a}$ Hitunglah

$$\begin{aligned} \overline{u} \cdot \overline{a} &= 4 - 3 + 12 = 13 \\ \|\overline{a}\|^2 &= \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

kompponen vektor dari $\overline{u}$ yang sejajar dengan$\overline{a}$ adalah

$$Proy_{\overline{a}}\overline{u} = \frac{\overline{u} \cdot \overline{a}}{\|\overline{a}\|^2}\overline{a} = \frac{13}{29}(2, 3, 4)$$

dan komponen vektor dari $\overline{u}$ yang tegak lurus dengan $\overline{a}$ adalah

$$\overline{u} - Proy_{\overline{a}}\overline{u} = (2, -1, 3) - \frac{13}{29}(2, 3, 4)$$

Sebelum mengakhiri kegiatan belajar ini, dan telah memperhatikan Teorema 3.3.5 dan Definisi 3.3.6 maka dapat diterima teorema berikut ini yang dikenal dengan nama ***Teorema Phytagoras***

TEOREMA 3.3.8 *Dua vektor $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$ disebut ortogonal atau tegak lurus, maka*

$$\|\overline{u} + \overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2$$

3.4 Cross Product

Operasi hasil kali silang atau *Cross Product* dari dua vektor yang posisi pangkalnya berimpit. Lebih jelasnya, perhatikan definisi dibawah ini

DEFINISI 3.4.1 *Jika $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor-vektor di $\mathbb{R}^3$, maka hasil kali silang didefinisikan*

$$\overline{u} \times \overline{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

atau

$$\overline{u} \times \overline{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_1v_3 - u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1)$$

CONTOH 3.4.1 Hitung $\overline{u} \times \overline{v}$ dengan $\overline{u} = (1, -2, 3)$ dan $\overline{v} = (4, 5, 6)$ di $\mathbb{R}^3$, maka

$$\overline{u} \times \overline{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right)$$

atau

$$\overline{u} \times \overline{v} = (-27, 6, 13)$$

Perbedaan antara hasil kali dalam dan hasil kali silang yaitu hasilnya, pada hasil kali dalam hasilnya adalah sebuah skalar, sedangkan pada hasil kali silang hasilnya adalah sebuah vektor yang tegak lurus dengan kedua vektor yang dikalikan. Perhatikan teorea berikut ini, yaitu hubungan antara hasil kali dalam dan hasil kali silang.

TEOREMA 3.4.2 *Jika $\overline{u}$, $\overline{v}$ dan $\overline{w}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^3$, maka*

a. $\overline{u} \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = 0$

b. $\overline{v} \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = 0$

c. $\|\overline{u} \times \overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 - (\overline{u} \cdot \overline{v})^2$

d. $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = (\overline{u} \cdot \overline{w})\overline{v} - (\overline{u} \cdot \overline{v})\overline{w}$

e. $(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w} = (\overline{u} \cdot \overline{w})\overline{v} - (\overline{v} \cdot \overline{w})\overline{u}$

Buktikan teorema tersebut dengan seksama sebagai latihan. Kemudian lihat contoh dibawah ini

CONTOH 3.4.2 Hitung $\overline{u} \times \overline{v}$ dengan $\overline{u} = (1, -2, 3)$ dan $\overline{v} = (4, 5, 6)$ di $\mathbb{R}^3$, maka

$$\overline{u} \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = 1.(-27) + (-2).6 + 3.13 = 0$$

begitu juga

$$\overline{v} \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = 4.(-27) + 5.6 + 6.13 = 0$$

membuktikan bahwa hasil kali silang selalu tegak lurus dengan vektor hasilnya.

Perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 3.4.3 *Jika $\overline{u}$, $\overline{v}$ dan $\overline{w}$ adalah vektor di $\mathbb{R}^3$ dan k skalar sebarang, maka*

a. $\overline{u} \times \overline{v} = -(\overline{v} \times \overline{u})$

b. $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} \times \overline{v}) + (\overline{u} \times \overline{w})$

c. $(\overline{u} + \overline{v}) \times \overline{w} = (\overline{u} \times \overline{w}) + (\overline{v} \times \overline{w})$

d. $k(\overline{u} \times \overline{v}) = (k\overline{u}) \times \overline{v}$

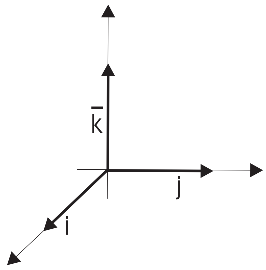
e. $\overline{u} \times \overline{0} = \overline{0} \times \overline{u} = \overline{0}$

f. $\overline{u} \times \overline{u} = \overline{0}$

Buktikan teorema tersebut secara seksama sebagai latian, perhatikan contoh dibawah ini

CONTOH 3.4.3 Tinjau vektor satuan standar di $\mathbb{R}^3$, yaitu

$$\overline{i} = (1, 0, 0) \qquad \overline{j} = (0, 1, 0) \qquad \overline{k} = (0, 0, 1)$$



Gambar 3.14 Vektor Satuan Standar

posisi dan arah dari ketiga vektor satuan tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.14, sehingga hasil kali silang antara ketiga vektor adalah

$$\begin{array}{lll} \bar{i} \times \bar{i} = \bar{0} & \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k} & \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} \\ \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} & \bar{j} \times \bar{j} = \bar{0} & \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i} \\ \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j} & \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i} & \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0} \end{array}$$

Gunakan tangan Kanan Ampere untuk mencari arah dari hasil kali silang dua vektor.

□ **Interpretasi Geometris Cross Product**

Telah diketahui untuk $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$, bahwa

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 - (\overline{u} \cdot \overline{v})^2$$

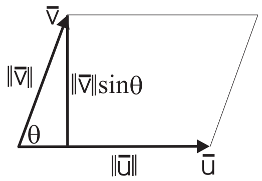
jika θ adalah sudut antara dua vektor tersebut, maka

$$\begin{aligned} \|\overline{u} \times \overline{v}\|^2 &= \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 - \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

sehingga

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \sin \theta$$

jika digambarkan dalam koordinat bidang merupakan luas jajaran genjang dengan alas $\|\overline{u}\|$ dan tinggi $\|\overline{v}\| \sin \theta$, seperti pada Gambar 3.15.



Gambar 3.15 Luas Jajaran Genjang

Sehingga dapat diturunkan teorema berikut ini

TEOREMA 3.4.4 *Jika* $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$ *maka* $\|\overline{u} \times \overline{v}\|$ *sama dengan luas jajaran genjang yang ditentukan oleh* $\overline{u}$ *dan* $\overline{v}$.

CONTOH 3.4.4 Jika $\overline{u} = (-3, -2, -2)$ dan $\overline{v} = (-2, 2, 3)$, maka luas yang dibangun oleh kedua vektor tersebut adalah

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|(-13, 5, -10)\| = \sqrt{294}$$

Modul 4

Transformasi Linear dan Sifat

Pendahuluan

Pada Modul ini akan dibahas materi yang berkaitan dengan transformasi linear, yang merupakan dasar dalam telaah aljabar yang berbentuk fungsi. Transformasi linear yang dimaksud adalah perpindahan dari satu ruang yang biasanya dinamakan dengan domain atau daerah asal ke ruang yang lain yang dinamakan dengan kodomain atau daerah hasil.

Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa menguasai atau memahami suatu perpindahan vektor dari satu ruang ke ruang yang lain.

Tujuan Instruksional Khusus

Mahasiswa dapat mengetahui dan memahami cara mentransformasikan vektor dari satu ruang ke ruang yang lain, secara khusus diharapkan :

1. Memahami pengertian transformasi linear
2. Memahami komposisi transformasi linear
3. Menyelesaikan atau mencari matriks transformasi

4.1 Transformasi Linear

Jika daerah asal suatu fungsi f adalah $\mathbb{R}^n$ dan daerah hasilnya adalah $\mathbb{R}^m$, maka f disebut ***transformasi*** dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ dan ditulis

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

jika transformasi dari ruang yang sama, dinamakan ***operator*** yaitu

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Untuk mengilustrasikan suatu transformasi dari satu ruang ke ruang yang lain, misal dari $\mathbb{R}^n$ ke ruang $\mathbb{R}^m$ dan $f_1, f_2, \cdots, f_m$ adalah fungsi bernilai real, ditulis

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & f_1(x_1, x_2, \cdot, x_n) \\ w_2 & = & f_2(x_1, x_2, \cdot, x_n) \\ w_3 & = & f_3(x_1, x_2, \cdot, x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_m & = & f_m(x_1, x_2, \cdot, x_n) \end{array} \tag{4.1}$$

Jika suatu transformasi dinyatakan seperti

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

maka dapat ditulis

$$T(x_1, x_2, \cdot, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

CONTOH 4.1.1 Persamaan-persamaan

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & x_1 + x_2 \\ w_2 & = & 3x_1x_2 \\ w_3 & = & x_1^3 - x_2^2 \end{array}$$

Jika ditulis dalam bentuk teransformasi $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ atau

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1x_2, x_1^3 - x_2^2)$$

misal

$$T(1, -2) = (-1, -6, -3)$$

Secara umum transformasi linear dari ruang $\mathbb{R}^n$ ke ruang $\mathbb{R}^m$ ditulis

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dan bila dinyatakan dalam persamaan, yaitu

$$
\begin{array}{rcl}
w_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
w_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
w_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{array}
$$

atau ditulis dalam notasi matriks

$$
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \cdots & a_1 n \\ a_2 1 & a_2 2 & \cdots & a_2 n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m 1 & a_m 2 & \cdots & a_m n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}
$$

atau secara ringkas ditulis dengan

$$
\overline{w} = \boldsymbol{A}\overline{x}
$$

Matriks $\boldsymbol{A}$ disebut *matriks standar* untuk transformasi linear T, dan T disebut *perkalian dengan* $\boldsymbol{A}$.

CONTOH 4.1.2 Transformasi linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan oleh persamaan-persamaan berikut

$$
\begin{array}{rcl}
w_1 & = & 2x_1 - 3x_2 + 1x_3 - 5x_4 \\
w_2 & = & 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\
w_3 & = & 5x_1 - x_2 + 4x_3
\end{array}
$$

jika dinyatakan dalam bentuk matriks

$$
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
$$

sehingga matriks standar untuk T adalah

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

jika

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$$

maka

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

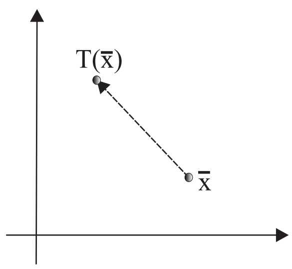
$\Diamond$

Jika $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah perkalian dengan ***A***, dan jika diperlukan penekanan bahwa ***A*** adalah matriks standar untuk ***T***, maka transformasi linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dinyatakan sebagai $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, jadi

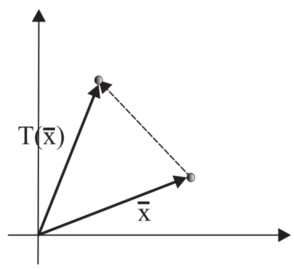
$$T_A(\overline{x}) = \boldsymbol{A}\overline{x}$$

□ **Geometri Transformasi Linear**

Secara geometris, apakah sebuah titik atau sebuah vektor yang akan ditransformasikan. Jika sebuah titik yang akan ditransformasikan dapat dilihat dalam Gambar 4.1, sedangkan sebuah vektor yang akan ditransformasikan dapat dilihat pada Gambar 4.2.



Gambar 4.1 T Memetakan Titik ke Titik



Gambar 4.2 T Memetakan Vektor ke Vektor

CONTOH 4.1.3 Jika ***0*** adalah matriks nol berukuran $m \times n$ dan $\overline{0}$ adalah vektor nol di $\mathbb{R}^n$, maka untuk setiap vektor $\overline{x}$ di $\mathbb{R}^n$, sehingga transformasinya

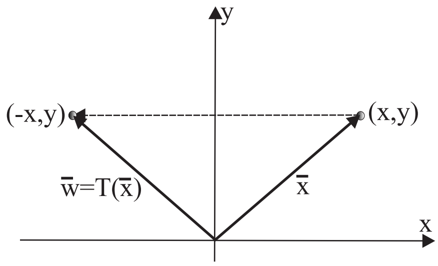
$$T_0(\overline{x}) = (0)\overline{x} = \overline{0}$$

transformasi tersebut dinamakan transformasi nol dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$.

□ **Operator Pencerminan di** $\mathbb{R}^2$

Operator $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang memetakan setiap vektor ke bayangan simetrisnya terhadap sumbu-y, seperti terlihat pada Gambar 4.3. Jika $\overline{w} = T(\overline{x})$ suatu operator, maka persamaan yang menghubungkan komponen $\overline{x}$ dan $\overline{w}$ adalah

$$\begin{aligned} w_1 &= -x = -x + 0y \\ w_2 &= \;\; y = 0x + y \end{aligned} \qquad (4.2)$$



Gambar 4.3 Pencerminan Terhadap Sumbu-y

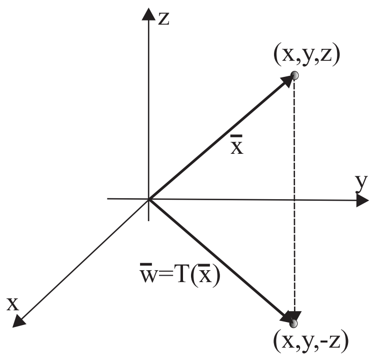
atau ditulis dalam bentuk matriks,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

karena Persamaan 4.2 adalah linear, maka T adalah operator linear dan dari Persamaan 4.3 adalah matrisk standar untuk T adalah

$$[T] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk pencerminan yang lain, silahkan dicari matriks transformasinya sebagai latihan.



Gambar 4.4 Pencerminan Terhadap Bidang-xy

□ **Operator Pencerminan di $\mathbb{R}^3$**

Operator $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ yang memetakan setiap vektor ke bayangan simetrisnya terhadap bidang-xy, seperti terlihat pada Gambar 4.4. Jika $\overline{w} = T(\overline{x})$ suatu operator, maka persamaan yang menghubungkan komponen $\overline{x}$ dan $\overline{w}$ adalah

$$\begin{aligned} w_1 &= x = x + 0y + 0z \\ w_2 &= y = 0x + y + 0z \\ w_3 &= -z = 0x + 0y - z \end{aligned} \tag{4.4}$$

atau ditulis dalam bentuk matriks,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

karena Persamaan 4.4 adalah linear, maka T adalah operator linear dan dari Persamaan 4.5 adalah matrisk standar untuk T adalah

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Untuk pencerminan terhadap bidang yang lain, silahkan dicari matriks transformasinya sebagai latihan.

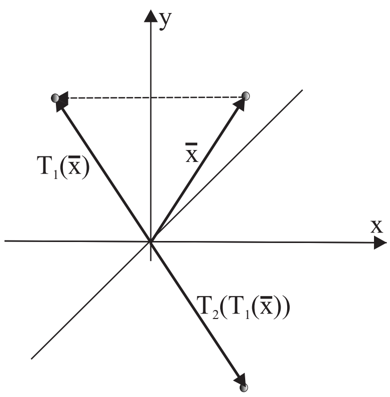
□ **Komposisi Transformasi**

Komposisi transformasi adalah transformasi yang dilakukan secara berulang. Jika $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ dan $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ adlah transformasi linear, maka $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ dikenakan pada T_A yang menghasilkan $T_A(\overline{x})$ kemudian dilanjutkan dengan T_B yang menghasilkan $T_B(T_A(\overline{x}))$ yang berada di $\mathbb{R}^m$, secara singkat ditulis

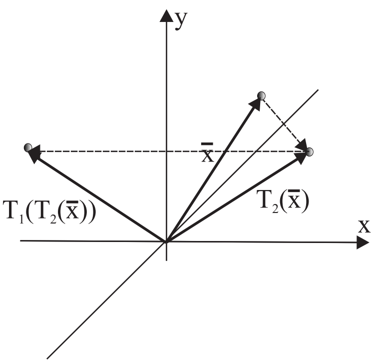
$$T_B(T_A(\overline{x})) = (T_B \circ T_A)(\overline{x})$$

jika T_A transformasi yang berbentuk matriks ***A*** dan T_B transformasi yang berbentuk matriks ***B***, sehingga komposisi $T_B \circ T_A$ adalah linear, karena

$$T_B(T_A(\overline{x})) = (T_B \circ T_A)(\overline{x}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\overline{x}) = (\boldsymbol{BA})\overline{x}$$



Gambar 4.5 Komposisi $T_2 \circ T_1$



Gambar 4.6 Komposisi $T_1 \circ T_2$

CONTOH 4.1.4 Jika $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah operator pencerminan terhadap sumbu-x dan $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah operator pencerminan terhadap garis-$y = x$. Gambar 4.5 mengilustrasikan hasil dari operasi pencerminan terhadap sumbu-x kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis-$y = x$ dapat ditulis

$$(T_2 \circ T_1)(\overline{x}) = T_2(T_1(\overline{x})) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sedangkan Gambar 4.6 mengilustrasikan hasil dari operasi pencerminan terhadap garis-$y = x$ kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x dapat ditulis

$$(T_1 \circ T_2)(\overline{x}) = T_1(T_2(\overline{x})) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jadi

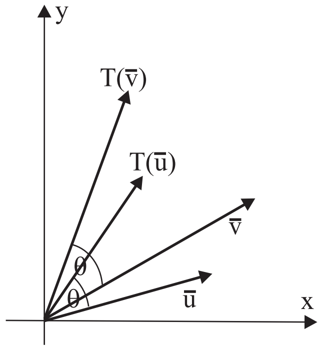
$$T_2 \circ T_1 \neq T_1 \circ T_2$$

Komposisi transformasi juga dapat dilakukan lebih dari dua transformasi linear.

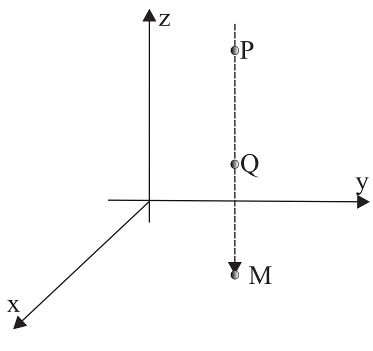
4.2 Sifat Transformasi Linear

Pada bagian ini akan dibahas tentang sifat dari transformasi linear, antara lain apakah matriks transformasi dapat dibalik (punya invers) dan juga juga mencari karakteristik transformasi sehingga dapat ditarik transformasi yang lebih umum.

Transformasi linear yang memetakan vektor atau titik yang berbeda ke vektor atau titik yang berbeda merupakan transformasi linear yang sangat penting. Salah satu transformasi linear yang penting adalah operator linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang merotasikan setiap vektor pada sudut θ Secara geometris jelas bahwa jika $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ merupakan vektor yang berbeda di $\mathbb{R}^2$, maka juga vektor $T(\overline{u})$ dan $T(\overline{v})$ merupakan hasil transformasi, seperti terlihat pada Gambar 4.7



Gambar 4.7 Vektor yang dirotasikan



Gambar 4.8 Titik-titik diproyeksikan

Sebaliknya, jika $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah proyeksi ortogonal $\mathbb{R}^3$ pada bidang-xy, maka titik-titik yang berbeda pada satu garis vertikal yang sama terpetakan ke satu titik yang sama seperti terlihat pada Gambar 4.8.

Perhatikan definisi berikut ini

DEFINISI 4.2.1 *Suatu transformasi linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ disebut satu-satu jika T memetakan vektor (titik) yang berbeda pada $\mathbb{R}^n$ ke vektor (titik) yang berbeda pada $\mathbb{R}^m$*

Dengan menganggap bahwa matriks transformasi berbentuk matriks persegi, jika matriks tersebut konsisten maka matriks tersebut punya invers dan sebaliknya, atau perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 4.2.2 *Jika **A** adalah matriks $n \times n$ dan $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ adalah perkalian dengan **A**, maka pernyataan berikut ini ekuivalen*

a. ***A** dapat dibalik (mempunyai invers)*

b. *Daerah hasil dari T_A adalah $\mathbb{R}^n$*

c. *T_A adalah satu-satu*

Contoh transformasi dari Gambar 4.7 menghasilkan sebuah matriks, yaitu

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

yang mempunyai invers (dapat dibalik), karena

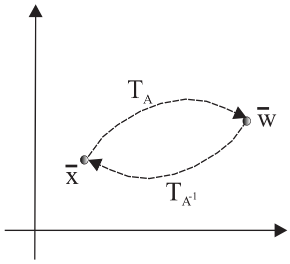
$$det[T] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Sedangkan matriks yang dibangun oleh Gambar 4.8 adalah sebuah matriks

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

yang tidak dapat dibalik (tidak punya invers), karena

$$det[T] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



Gambar 4.9 Operator Invers

□ **Invers Operator Linear**
Jika $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah operator linear satu-satu, maka Teorema 4.2.2 matriks ***A*** dapat dibalik. Sedangkan $T_{A^{-1}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sendiri adalah operator linear yang disebut *invers dari* T_A. Operator-operator T_A dan $T_{A^{-1}}$ saling membalikan sehingga

$$T_A(T_{A^{-1}}(\overline{x})) = AA^{-1}\overline{x} = I\overline{x} = \overline{x}$$

atau

$$T_{A^{-1}}(T_A(\overline{x})) = A^{-1}A\overline{x} = I\overline{x} = \overline{x}$$

dapat juga ditulis

$$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I$$

atau

$$T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_I$$

Secara geometris dapat dilihat pada Gambar 4.9 yang mempunyai arti

$$T_{A^{-1}}(\overline{w}) = T_{A^{-1}}(T_A(\overline{x})) = \overline{x}$$

CONTOH 4.2.1 Tunjukan bahwa operator $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ didefinisikan oleh persamaan

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + x_2 \\ w_2 &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

adalah satu-satu, cari $T^{-1}(w_1, w_2)$
Jawab:
Ubah persamaan ke bentuk matriks, yaitu

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sehingga matriks standar untuk T adalah

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

matriks tersebut mempunyai invers, yaitu

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi

$$[T^{-1}] \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3w_1 - w_2 \\ -2w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$

atau dapat ditulis

$$T^{-1}(w_1, w_2) = (3w_1 - w_2, -2w_1 + w_2)$$

□ **Sifat Kelinearan**

Setelah dipelajari tentang invers dari suatu transformasi, sifat kelinearan adalah konsep dasar untuk memperlas konsep secara umum, perhatikan teorema berikut ini.

TEOREMA 4.2.3 *Transformasi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dikatkan linear jika dan hanya jika hubungan berikut terpenuhi, yaitu $\forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$ dan c skalar, berlaku*

a. $T(\overline{u} + \overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v})$

b. $T(c\overline{u}) = cT(\overline{u})$

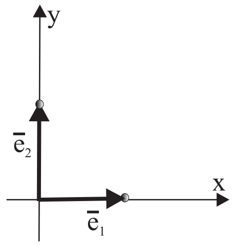
Bukti dari teorema ini, gunakan teorema atau definisi dari matriks yang sudah dipelajari terlebih dahulu. Perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 4.2.4 *Jika $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah transformasi linear, dan $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \cdots, \overline{e}_n$ adalah vektor basis standar dari $\mathbb{R}^n$, maka matriks standar dari T adalah*

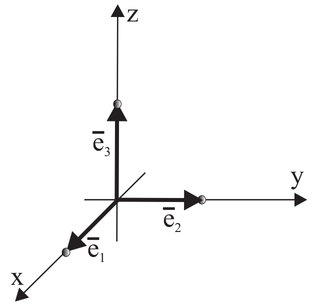
$$[T] = [T(\overline{e}_1); T(\overline{e}_2); \cdots ; T(\overline{e}_n)] \tag{4.7}$$

Proyeksi ortogonal pada bidang-xy yang menghasilkan sebuah matriks transformasi sesuai dengan Persamaan 4.6, jika dicari dengan menggunakan Persamaan 4.7 akan didapat

$$T(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(\overline{e}_2) = \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(\overline{e}_3) = \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gambar 4.10 Basis Standar $\mathbb{R}^2$



Gambar 4.11 Basis Standar $\mathbb{R}^3$

jadi

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yang sesuai.

Modul **5**

Ruang Vektor

Pendahuluan

Pada Modul ini akan dibahas materi yang berkaitan dengan vektor secara umum, yaitu suatu obyek sebarang. Dengan memberikan aksioma-aksioma tertentu pada suatu himpunan vektor, maka himpunan vektor dapat dikaakan sebagai ruang vektor, kemudian dilanjutkan dengan sub-ruang dan dijelaskan pula sifat-sifat dari ruang vektor tersebut. Tidak terlepas pula akan dicari rank (peringkat) dan nulitas (null) serta dimensi dari sebuah matriks.

Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa menguasai atau memahami tentang vektor (apa saja yang dapat disebut sebagai vektor) dan ruang vektor, begitu juga paham tentang peringkat dan nulitas serta dimensi dari dari sebuah matriks.

Tujuan Instruksional Khusus

Mhs dapat mengetahui tentang vektor dan ruangnya, secara khusus diharapkan :

1. Memahami pengertian vektor secara umum
2. Memahami ruang vektor dan sub-ruangnya
3. Memahami tentang basis dan dimensi dari suatu ruang
4. Memahami rank dan nulitas dari suatu ruang

5.1 Ruang Vektor Real

Di modul sebelumnya, telah dipelajari dengan seksama tentang vektor di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ yang dapat divisualisasikan dengan baik dan nyata. Sedangkan di ruang yang lebih tinggi lagi atau lebih dari tiga, visualisasi tidak dapat dilakukan dengan baik dan nyata. Oleh karena itu perlu dibuat suatu aturan bagaimana vektor itu sebenarnya, perhatikan definisi berikut ini:

DEFINISI 5.1.1 *V adalah himpunan vektor tak kosong dari obyek dengan dua opearasi yang didefinisikan, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian skalar.* ***Penjumlahan vektor*** *adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap pasangan obyek $\overline{u}$, $overline v \in V$ dengan suatu obyek $\overline{u}+\overline{v}$ yang disebut dengan* ***jumlah*** *$\overline{u}$* ***dan*** *$\overline{v}$ dan* ***perkalian skalar*** *adalah aturan yang menghubungkan setiap skalar k dan setiap obyrk $\overline{u} \in V$ dengan obyek $k\overline{u}$ yang disebut dengan* ***perkalian skalar*** *dari $\overline{u}$ dengan k. Jika aksioma dibawah ini dipenuhi oleh $\forall \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$ dan semua skalar k dan l, maka V disebut* ***ruang vektor*** *obyek yang berada di dalam V disebut dengan* ***vektor****.*

a. *Jika* $\overline{u}, \overline{v} \in V$, *maka* $\overline{u}+\overline{v} \in V$

b. $\overline{u}+\overline{v} = \overline{v}+\overline{u}$

c. $\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w}) = (\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$

d. *Ada* $\overline{0} \in V$ *yang disebut dengan vektor nol untuk* V,
sehingga berlaku $\overline{0}+\overline{u} = \overline{u}+\overline{0} = \overline{u}$

e. *Ada* $-\overline{u} \in V$ *yang disebut dengan vektor negatif dari* $\overline{u}$,
sehingga berlaku $\overline{u}+(-\overline{u}) = (-\overline{u})+\overline{u} = \overline{0}$

f. $k\overline{u} \in V$

g. $k(\overline{u}+\overline{v}) = k\overline{u}+k\overline{v}$

h. $(k+l)\overline{u} = k\overline{u}+l\overline{u}$

i. $k(l\overline{u}) = (kl)\overline{u}$

j. $1\overline{u} = \overline{u}$

Telah disebutkan diatas yang dimaksud dengan obyek dapat berbentuk vektor, matriks atau yang lainnya, tergantung pada aplikasi yang digunakan dan operator yang digunakan tidak harus berbentuk penjumlahan dan perkalian. Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

CONTOH 5.1.1 Tunjukan bahwa himpunan V dari semua matriks beukuran 2×2 dengan angota bilangan real merupakan suatu ruang vektor, jika operasi penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks dan operasi perkalian skalar dengan vektor diartikan sebagai perkalian skalar dengan matriks. Bagaimana dengan matriks yang berukuran $m \times n$

CONTOH 5.1.2 Kalau $V = \mathbb{R}^2$ dan didefinisikan dua operasi yaitu

$$\overline{u} + \overline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \qquad \text{dan} \qquad k\overline{u} = (ku_1, 0)$$

Apakah V ruang vektor?
Ternyata V bukan ruang vektor, karena dari sepuluh aksioma, salah satu axioma tersebut tidak terpenuhi, yaitu aksioma ke-sepuluh

Sub-ruang

Suatu ruang vektor yang tercakup oleh ruang vektor yang lebih besar adalah suatu hal yang mungkin. Sebagai contoh ruang vektor $\mathbb{R}^2$ akan tercakup oleh ruang vektor $\mathbb{R}^3$. Secara umum perhatikan definisi berikut ini

DEFINISI 5.1.2 *Suatu himpunan bagian W dari suatu ruang vektor V disebut suatu **sub-ruang** dari V jika W sendiri adalah suatu ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.*

Secara umum, kesepuluh aksioma ruang vektor untuk menunjukan bahwa suatu himpunan W dengan penjumlahan dan perkalian skalar membentuk suatu ruang vektor. Secara tidak langsung W diwarisi oleh aksioma dari V. Perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 5.1.3 *Jika W adalah suatu himpunan satu atau lebih vektor dari suatu ruang vektor V, maka W adalah suatu sub-ruang dari V jika dan hanya jika syarat-syarat berikut terpebuhi*

1. *Jika $\overline{u}, \overline{v} \in W$, maka $\overline{u} + \overline{v} \in W$*
2. *Jika k skalar, dan $\overline{u} \in W$, maka $k\overline{u} \in W$*

CONTOH 5.1.3 Himpunan yang beranggotakan vektor nol saja $\{\overline{0}\}$ adalah sub-ruang $\mathbb{R}^2$ yang dinamakan ***sub-ruang nol*** begitu juga sebagai sub ruang $\mathbb{R}^3$, karena memenuhi kedua aksioma pada Teorema 5.2.2 yang juga memenuhi kesepuluh aksioma pada Definisi 5.2.1

CONTOH 5.1.4 Garis yang melalui titik asal adalah sub-ruang $\mathbb{R}^2$ dan juga sub-ruang $\mathbb{R}^3$, karena setiap garis yang melalui titik asal bila dijumlahkan dengan garis yang melalui titik asal yang lain hasilnya juga sebuah garis yang melalui titik asal juga, begitu juga perkalian skalar.

CONTOH 5.1.5 Bidang yang melalui titik asal adalah sub-ruang $\mathbb{R}^3$, karena dua vektor yang terletak dalam satu bidang bila dijumlahkan hasilnya akan dalam satu bidang juga.

Jika $A\overline{x} = \overline{b}$ adalah suatu sistem persamaan linear, maka setiap vektor $\overline{x}$ yang memenuhi persamaan ini disebut suatu ***vektor penyelesaian*** dari sistem tersebut. Perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 5.1.4 *Jika $A\overline{x} = \overline{0}$ adalah suatu sistem linear homogen dari m persamaan dengan n peubah, maka himpunan vektor penyelesaiannya adalah sub-ruang dari $\mathbb{R}^n$.*

CONTOH 5.1.6 Pandang Sistem linear homogen $A\overline{x} = \overline{0}$ dengan

$$a. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \quad b. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad c. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad d. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jawab:

lakukan OBE sedemikian hingga matriks A menjadi matriks eselon tereduksi, sehingga

a. dengan memisalkan $z = t$ dan $y = s$, maka $x = 2s - 3t$, sehingga dapat ditulis

$$x = 2y - 3z \qquad \text{atau} x - 2y + 3z = 0$$

yang merupakan persamaan bidang yang melalui titik asal.

b. dengan memisalkan $z = t$, maka $y = -t$ dan $x = -5t$, yang merupakan persamaan garis yang melalui titik asal.

c. penyelesaiannya adalah $z = 0$, $y = 0$ dan $x = 0$, yang merupakan titik asal.

d. dengan memisalkan $z = t$, $y = s$ dan $x = r$, dimana r, s, t mempunyai nilai sebarang, sehingga ruang penyelesaiannya adalah semua anggota di $\mathbb{R}^3$.

5.2 Kombinasi Linear dan Membangun

Pada kegiatan belajar ini akan dikenalkan suatu istilah atau konsep yaitu kombinasi linear dari vektor-vektor dan membangun suatu ruang vektor. Perhatikan definisi berikut ini:

DEFINISI 5.2.1 *Suatu vektor $\bar{p}$ disebut suatu **kombinasi linear** dari vektor-vektor $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \cdots, \bar{q}_r$, jika bisa dinyatakan dalam bentuk*

$$\bar{p} = k_1\bar{q}_1 + k_2\bar{q}_2 + \cdots + k_r\bar{q}_r$$

dengan $k_1, k_2, \cdots, k_r$ adalah skalar.

CONTOH 5.2.1 Tinjau vektor $\bar{p} = (3, 2, 1)$ dan $\bar{q} = (1, 2, -1)$ di $\mathbb{R}^3$. Tunjukan bahwa $\bar{r} = (9, 2, 7)$ adalah kombinasi linear dari $\bar{p}$ dan $\bar{q}$ dan bahwa $\bar{s} = (9, 2, 7)$ bukanlah kombinasi linear dari $\bar{p}$ dan $\bar{q}$

jawab:
$\bar{r}$ akan kombinasi linear jika dapat ditemukan skalar k dan l sedemikian hingga berlaku $\bar{r} = k\bar{p} + l\bar{q}$, yaitu

$$\begin{aligned}(9, 2, 7) &= k(3, 2, 1) + l(1, 2, -1)\\ &= (3k, 2k, k) + (l, 2l, -l)\\ &= (3k + l, 2k + 2l, k - l)\end{aligned}$$

dengan menyamakan komponen yang berpadanan diperoleh

$$\begin{aligned}3k + l &= 9\\ 2k + 2l &= 2\\ k - l &= 7\end{aligned}$$

Penyelesaian dari sistem tersebut menghasilkan $k = 4$ dan $l = -3$, sehingga $\bar{r} = 4\bar{p} - 3\bar{q}$, demikian juga untuk $\bar{s}$ apakah merupakan kombinasi linear dari $\bar{p}$ dan $\bar{q}$, yaitu $\bar{s} = k\bar{p} + l\bar{q}$, yaitu

$$\begin{aligned}(4, -1, 8) &= k(3, 2, 1) + l(1, 2, -1)\\ &= (3k, 2k, k) + (l, 2l, -l)\\ &= (3k + l, 2k + 2l, k - l)\end{aligned}$$

dengan menyamakan komponen yang berpadanan diperoleh

$$\begin{aligned}3k + l &= 4\\ 2k + 2l &= -1\\ k - l &= 8\end{aligned}$$

Sistem tersebut tidak konsisten artinya tidak mempunyai penyelesaian atau tidak dapat ditemukan k dan l, sehingga $\bar{s}$ bukan kombinasi linear dari $\bar{p}$ dan $\bar{q}$. $\Diamond$

Jika $\forall \bar{u}_i \in V$, untuk $i = 1, 2, 3, \cdots, r$, dan jika $\exists \bar{v} \neq \bar{u} \in V$ merupakan kombinasi linear dari $\bar{u}_i$ dan yang lainnya mungkin tidak kombinasi linear. Teorema berikut akan menunjukan bahwa himpunan W yang terdiri dari semua vektor yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\bar{u}_i$, maka W merupakan sub-ruang V.

TEOREMA 5.2.2 *Jika* $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_r$ *adalah vektor-vektor di ruang vektor* V*, maka:*

1. *Himpunan* W *semua kombinasi linear dari* $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_r$ *merupakan suatu sub-ruang dari* V.
2. W *adalah sub-ruang terkecil dari* V *yang berisi* $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_r$ *dalam arti bahwa setiap sub-ruang lain dari* V *yang berisi* $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_r$ *pasti mengandung* W.

Selanjutnya perhatikan definisi berikut ini:

DEFINISI 5.2.3 *Jika* $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_r\}$ *adalah suatu himpunan vektor di ruang vektor* V*, maka sub-ruang* W *dari* V *yang mengandung semua kombinasi linear dari vektor-vektor di* S *disebut ruang terbangun oleh* $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_r$ *dan vektor-vektor tersebut membangun* W*. Untuk menunjukan bahwa* W *adalah ruang terbangun oleh vektor-vektor di* $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_r\}$*, dituliskan*

$$W = bang(S) \qquad \textit{atau} \qquad W = bang\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_r\}$$

CONTOH 5.2.2 Tentukan apakah $\bar{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ dan $\bar{v}_3 = (1, 1, 2)$ membangun ruang vektor $\mathbb{R}^3$?

jawab:

Ambil sebarang $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, nyatakan sebagai kombinasi linear, yaitu

$$\bar{b} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3$$

atau

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + 2k_2 + k_3, k_2 + k_3, k_1 + 3k_2 + 2k_3)$$

sehingga didapat sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + k_3 &= b_1 \\ k_2 + k_3 &= b_2 \\ k_1 + 3k_2 + 2k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

untuk mencari nilai $\bar{b}$ sehingga sistem konsisten, maka cukup diperiksa apakah matriks $det(A) = 0$ atau tidak, jika tidak maka $\bar{b}$ dapat ditemukan sehingga $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ dan $\bar{v}_3$ membangun $\mathbb{R}^3$ $\diamondsuit$

5.3 Bebas Linear

Pada kegiatan bealajar kali ini, akan dikenal tentang himpunan suatu vektor yang anggotanya tidak saling tergantung antara satu vektor dengan vektor yang lainnya. Bagian ini merupakan kelanjutan yang erat dari kegiatan sebelumnya. Perhatikan definisi berikut ini

DEFINISI 5.3.1 *Jika* $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \cdots, \bar{v}_r\}$ *adalah suatu himpunan vektor tak-kosong, maka persamaan berikut*

$$k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3 + \cdots + k_r\bar{v}_r = \bar{0}$$

sedikitnya mempunyai penyelesaian berikut

$$k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_r = 0$$

Jika hanya itu satu-satunya penyelesaian, maka S *dinamakan himpunan vektor yang bebas linear, tetapi jika ada penyelesaian yang lain, maka* S *dinamakan tak bebas linear.*

CONTOH 5.3.1 Pandang $S = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ di $\mathbb{R}^3$, dengan $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$ dan $\bar{k} = (0, 0, 1)$ apakah S bebas linear ?

jawb:

Untuk membuktikannya, perhatikan

$$l_1\bar{i} + l_2\bar{j} + l_3\bar{k} = \bar{0}$$

atau

$$l_1(1, 0, 0) + l_2(0, 1, 0) + l_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

sehingga didapat

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0$$

yang merupakan satu-satunya penyelesaian, sehingga S bebas linear. $\Diamond$

CONTOH 5.3.2 Pandang $S = \{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}$ di $\mathbb{R}^3$, dengan $\bar{p} = (3, -2, 1)$, $\bar{q} = (-1, 6, 5)$ dan $\bar{r} = (1, 2, 3)$ apakah S bebas linear ?

jawb:

Untuk membuktikannya, perhatikan

$$l_1\bar{p} + l_2\bar{q} + l_3\bar{r} = \bar{0}$$

atau

$$l_1(3, -2, 1) + l_2(-1, 6, 5) + l_3(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$$

sehingga dapat ditulis dalam sistem linear seperti berikut

$$\begin{aligned} 3l_1 - l_2 + l_3 &= 0 \\ -2l_1 + 6l_2 + 2l_3 &= 0 \\ 1l_1 + 5l_2 + 3l_3 &= 0 \end{aligned}$$

karena nilai determinan dari sistem linear tersebut tidak sama dengan nol, maka antara satu vektor dengan vektor yang lainnya saling tergantung atau S tak bebas linear. $\Diamond$

Perhatikan teorema dibawah ini, yaitu

TEOREMA 5.3.2 *Suatu himpunan Sdengan dua atau lebih vektor, dinamakan*

1. *Tak bebas linear, jika dan hanya jika sedikitnya salah satu vektor di S dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dengan vektor yang lainnya.*
2. *Bebas linear, jika dan hanya jika tidak ada vektor di S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dengan vektor yang lainnya.*

CONTOH 5.3.3 $S = \{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}$ dengan

$$\bar{p} = (2, -1, 0, 3), \qquad \bar{q} = (1, 2, 5, -1), \qquad \bar{r} = (7, -1, 5, 8)$$

Buktikan S tak bebas linear?

jawab:

Sesuai dengan Teorema 5.3.2, bahwa jika suatu himpunan vektor jika dan hanya jika salah satu vektor merupakan kombinasi linear dari vektor yang lainnya, maka himpunan vektor tersebut tak bebas linear, karena

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}\bar{q} + \frac{1}{3}\bar{r} \qquad \text{atau} \qquad \bar{q} = -3\bar{p} + \bar{r} \qquad \text{atau} \qquad \bar{r} = 3\bar{p} + \bar{q}$$

jadi S tak bebas linear $\Diamond$

Perhatikan teorema dibawah ini,

TEOREMA 5.3.3
1. *Suatu himpunan vektor terhingga yang mengandung vektor nol, maka himpunan tersebut tak bebas linear*
2. *Suatu himpunan mempunyai tepat dua vektor dan salah satu vektor merupakan penggandaan dari vektor yang lainnya, maka himpunan vektor tersebut tak bebas linear*

Silahkan dibuktikan!. Kemudian perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 5.3.4 *Anngap $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \cdots, \bar{v}_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$. Jika $r > n$, maka S tak bebas linear.*

Bukti:

Karena jumlah vektor pada lebih banyak daripada ruangnya, maka bentuk sisitem linearnya adalah jumlah persamaannya lebih banyak daripada jumlah variabelnya, sehingga sistem mempunyai banyak penyelesaian, oleh karena itu S tak bebas linear.

5.4 Basis dan Dimensi

Anggapan bahwa garis merupakan dimensi satu, bidang merupakan dimensi dua dan ruang dimensi tiga. Anggapan tersebut yang merupakan gagasan intuitf mengenai dimensi yang tepat. Perhatikan ketiga gambar dibawah ini, Gambar **??** yaitu koordinat $P = (a, b)$ pada suatu sistem koordinat segiempat pada ruang berdimensi dua. Gambar **??**, yaitu koordinat $P = (a, b)$ pada sistem koordinat tak-segiempat pada ruang berdimensi dua, sedangkan Gambar **??** adalah koordinat $P = (a, b, c)$ pada suatu sistem koordniat tak-segiempat pada ruang berdimensi tiga.

Perhatikan definisi berikut ini,

DEFINISI 5.4.1 *Jika V ruang vektor dan $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \cdots, \bar{v}_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor di V, maka S dinamakan **basis** untuk V jika kedua syarat dibawah ini terpenuhi, yaitu*

1. *S bebas linear*
2. *S membangun V.*

Akan lebih jelas, perhatikan teorema berikut ini;

TEOREMA 5.4.2 *Jika $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \cdots, \bar{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang V, maka $\forall \bar{x} \in V$ dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$\bar{x} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + \cdots + k_n v_n$$

dalam tepat satu cara.

Bukti dipakai untuk latihan.

□ **Koordinat Relatif terhadap Basis**

Jika $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \cdots, \bar{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V dan

$$\bar{x} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + \cdots + k_n v_n$$

adalah suatu ekspresi untuk vektor $\bar{x}$ dalam bentuk basis S, maka skalar $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n\}$ disebut koordinat $\bar{x}$ relatif terhadap S. Vektor $(k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n)$ di $\mathbb{R}^n$ yang tersusun dari koordinat-koordinat ini dinamakan koordinat vektor $\bar{x}$ relatif terhadap S, hal ini dinyatakan dengan

$$\bar{x} = (k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n)$$

CONTOH 5.4.1 Pada contoh sebelumnya, $S = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ dan

$$\bar{i} = (1,0,0), \quad \bar{j} = (0,1,0), \quad \bar{k} = (0,0,1)$$

yang merupakan himpunan vektor yang bebas linear di $\mathbb{R}^3$ dan membangun $\mathbb{R}^3$, jadi S adalah basis standart untuk $\mathbb{R}^3$.

Jika $\bar{u} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, dapat ditulis

$$\bar{u} = (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$$

sehingga dapat ditulis vektor relatifnya sebagai

$$(\bar{u})_s = (a,b,c)$$

Bagaimana basis standart untuk $\mathbb{R}^n$, pikirkan.

CONTOH 5.4.2 $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ dengan $\bar{u}_1 = (1,2,1)$,$\bar{u}_2 = (2,9,0)$, dan $\bar{u}_3 = (3,3,4)$. Tunjukan bahwa S adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$?

jawab:

Untuk membuktikan apakah S basis atau bukan, cukup dibuktikan apakah S mempunyai sifat bebas linear dan membangun ruang vektor $\mathbb{R}^3$.

Untuk membuktikan S membangun $\mathbb{R}^3$, ambil $\forall \bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, kemudian ditunjukan apakah $\bar{b}$ merupakan kombinasi linear dari S, ditulis

$$\begin{aligned} \bar{b} &= k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + k_3\bar{u}_3 \\ (b_1, b_2, b_3) &= k_1(1,2,1) + k_2(2,9,0) + k_3(3,3,4) \end{aligned}$$

atau ditulis dalam bentuk sistem linear, yaitu

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \\ k_1 + 4k_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{5.1}$$

hitung determinan dari Persamaan 5.2, jika nilai determinannya tidak sama dengan nol, maka $\bar{b}$ merupakan kombinasi linear dari S, sehingga S membangun $\mathbb{R}^3$.

Untuk membuktikan S bebas linear, ambil $\bar{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, kemudian ditunjukan apakah $\bar{0}$ merupakan kombinasi linear dari S, ditulis

$$\begin{aligned} \bar{0} &= l_1\bar{u}_1 + l_2\bar{u}_2 + l_3\bar{u}_3 \\ (0,0,0) &= l_1(1,2,1) + l_2(2,9,0) + l_3(3,3,4) \end{aligned}$$

atau ditulis dalam bentuk sistem linear, yaitu

$$\begin{aligned} l_1 + 2l_2 + 3l_3 &= 0 \\ 2l_1 + 9l_2 + 3l_3 &= 0 \\ l_1 + 4l_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

hitung determinan dari Persamaan 5.2, jika nilai determinannya tidak sama dengan nol, maka matriks koefisiennya mempunyai invers sehingga sistem linear mempunyai penyelesaian tunggal yaitu $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, sehingga S bebas linear.

Karena S mempunyai sifat bebas linear dan membangun $\mathbb{R}^3$, maka S basis untuk ruang vektor $\mathbb{R}^3$. $\diamondsuit$

Setelah diketahui konsep dasar basis dari suatu ruang vektor, sekarang akan dipelajari dimensi dari suatu ruang vektor, perhatikan definisi berikut ini;

DEFINISI 5.4.3 *Suatu ruang vektor tak-nol V dinamakan berdimensi berhingga jika V berisi himpunan vektor berhingga yaitu $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_n\}$ yang merupakan basis. Jika tidak himpunan seperti itu, maka V berdimensi tak-hingga. Ruang vektor nol dinamakan berdimensi berhingga.*

dan

DEFINISI 5.4.4 *Dimensi suatu ruang vektor berdimensi berhingga V, yang ditulis dengan $dim(V)$, didefinisikan sebagai jumlah vektor dalam sautu basis V. Ruang vektor nol berdimensi nol.*

Seperti Contoh 5.5.2, S adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$, maka dimensi dari $\mathbb{R}^3$ adalah $dim(S) = 3$.

CONTOH 5.4.3 Tentukan basis dan dimensi dari ruang penyelesaian sisitem linear homogen dibawah ini

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -1x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

jawab:

Ubahlah dalam bentuk matriks $A\bar{x} = \bar{b}$ kemudian lakukan OBE sedmikian hingga matriks

A menjadi matriks eselon tereduksi seperti dibawah ini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

maka dengan memisalkan $x_5 = t$ dan $x_2 = s$, maka

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

atau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

yang menunjukan bahwa vektor-vektor

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

membangun ruang penyelesaian, oleh karena itu $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ adalah basis ruang penyelesaian yang mempunyai dimensi dua. $\diamondsuit$

5.5 Ruang Baris, Ruang Kolom dan Ruang Kosong

Pada bagian ini akan dipelajari tiga ruang sekaligus, yaitu ruang baris, ruang kolom dan ruang kosong ayng berkaitan dengan matriks. Hasilnya diharapkan adalah paham terhadap hubungan antara penyelesaian sustu sistem linear dan sifat-sifat matriks koefisien. Perhatikan definisi berikut ini

DEFINISI 5.5.1 *Suatu matriks A berukuran $m \times n$, yaitu*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vektor-vektor

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\ \bar{r}_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ \vdots &= \vdots \\ \bar{r}_m &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}] \end{aligned}$$

*di $\mathbb{R}^n$, yang dibangun dari matriks A dinamakan **vektor-vektor baris** dari A dan vektor-vektor*

$$\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \bar{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

*di di $\mathbb{R}^m$, yang dibangun dari matriks A dinamakan **vektor-vektor kolom** dari A*

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh dibawah ini.

CONTOH 5.5.1 Ambil matriks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Vektor-vektor baris dari matriks A adalah

$$\bar{r}_1 = [3 \;\; 6 \;\; 9] \qquad \bar{r}_2 = [2 \;\; -1 \;\; -7]$$

dan vektor-vektor kolom matriks A adalah

$$\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}_3 1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \diamondsuit$$

Sekarang perhatikan definisi berikut ini

DEFINISI 5.5.2 *Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka sub-ruang dari $\mathbb{R}^n$ yang dibangun oleh vektor-vektor baris dari A dinamakan* ***ruang baris*** *dari A, dan sub-ruang dari $\mathbb{R}^m$ yang dibangun oleh vektor-vektor kolom dari A dinamakan* ***ruang kolom*** *dari A. Sedangkan ruang penyelesaian dari persamaan $Ax = 0$ yang merupakan sub-ruang dari $\mathbb{R}^n$ dinamakan* ***ruang kosong*** *dari A.*

Perhatikan pula beberapa teorema yang akan memperkuat, yaitu

TEOREMA 5.5.3 *Suatu sistem linear $A\bar{x} = \bar{b}$ konsisten jiadan hanya jika $\bar{b}$ berada di ruang kolom A*

TEOREMA 5.5.4 *OBE tidak mengubah ruang kosong dan ruang baris dari suatu matriks*

CONTOH 5.5.2 Seperti Contoh 5.5.4, carilah ruang kosongnya, dari sistem linear homogen, ubah kebentuk matriks. Setelah itu lakukan OBE sehingga matriks berbentuk eselon tereduksi, sehingga ditemukan

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

yang merupakan basis ruang kosongnya. $\Diamond$

TEOREMA 5.5.5 *Jika suatu matriks berbentuk baris-eselon, maka vektor-vektor baris dengan utama 1 (vektor baris yang tak nol) membentuk* ***basis*** *suatu* ***ruang baris*** *dan vektor-vektor kolom dengan utama 1 dari vektor-vektor baris membentuk* ***basis*** *untuk* ***ruang kolom****.*

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh dibawah ini

CONTOH 5.5.3 Perhatikan matriks yang berbentuk baris eselon dibawah ini

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sesuai dengan teorema diatas, bahwa vektor-vektor

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= [1\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 1]\\ \bar{r}_2 &= [0\ \ 1\ \ 0\ \ 2\ \ -1]\\ \bar{r}_3 &= [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2]\end{aligned}$$

membentuk basis ruang baris dari matriks R dan vektor-vektor

$$\bar{c}_1 \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}_2 \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}_3 \begin{pmatrix} 0\\2\\1\\0 \end{pmatrix}$$

membentuk basis ruang kolom untuk R. $\Diamond$

Contoh berikut yang akan mempertegas dari contoh sebelumnya

CONTOH 5.5.4 Cari basis-basis ruang baris dan ruang kolom dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 7 & 10 & 0\\ 5 & 1 & 10 & 17 & 23 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

jawab:
Lakukan OBE pada matriks A sehingga menghasilkan matriks R, yaitu

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berdasarkan Teorema 5.5.5 , diperoleh bahwa, vektor-vektor

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= [1\ \ 0\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 1]\\ \bar{r}_2 &= [0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 0]\\ \bar{r}_3 &= [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]\end{aligned}$$

membentuk basis ruang baris dari matriks R dan vektor-vektor

$$\bar{c}'_1 \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}'_2 \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}'_3 \begin{pmatrix} 3\\1\\1\\0 \end{pmatrix}$$

membentuk basis ruang kolom untuk R. Jadi kolom-kolom yang berpadanan dengan A, yaitu

$$\vec{c}_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c}_2' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c}_3' \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}$$

membentuk basis ruang kolom untuk A. $\quad\Diamond$

5.6 Rank dan Nulitas

Pada bagian ini akan dibahas atau diperiksa hubungan antara sistem linear dan ruang baris, ruang kolom serta ruang kosong dari matriks koefisien. Dipelajari pula dimensi dari ruang baris, ruang kolomdan ruang kosong.

Dari contoh-contoh kegiatan sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa dimensi ruang baris dan dimensi ruang kolom mempunyai dimensi yang sama, perhatikan teorema berikut ini

TEOREMA 5.6.1 *Jika A sebarang matriks, maka ruang baris dan ruang kolom dari A mempunyai dimensi yang sama*

Dari teorema pada kegiatan belajar sebelumnya menyatakan bahwa OBE tidak menguah ruang baris baris dari suatu matriks, sehingga utama 1 pada matriks koefisien jumlahnya sama. Oleh karena itu mempnyai dimensi yang sama. Perhatikan definisi berikut ini

DEFINISI 5.6.2 *Dimensi bersaa dari ruang baris dan ruang kolom dari sutau matriks A disebut dengan **rank** dari A dan ditulis dengan **rank(A)**, sedangkan dimensi ruang kosong dari A disebut dengan **nulitas** dari A dan ditulis **null(A)**.*

Perhatikan pula teorema berikut ini

TEOREMA 5.6.3 *Jika A matriks sebarang, rank(A)=rank(A^T)*

dan

TEOREMA 5.6.4 *Jika A matriks sebarang dengan n kolom, maka*

$$rank(A) + null(A) = n$$

yang berarti dapat ditarik teorema lain, yaitu

TEOREMA 5.6.5 *Jika A matriks sebarang berukuran $m \times n$, maka*

1. *rank(A)= jumlah variabel bebas pada penyelesaian $A\bar{x} = \bar{0}$*
2. *null(A) = jumlah parameter dari penyelesaian $A\bar{x} = \bar{0}$*

Akan lebih jelas, perhatikan contoh dibawah ini

CONTOH 5.6.1 Cari rank dan null dari matriks dibawah ini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 10 & 13 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

jawab:

Lakukan OBE pada matriks diatas sehingga menjadi matriks berbentuk eseleon tereduksi, yaitu

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika dilakukan OBE pada A^T sehingga menjadi matriks eselon teredusi, yaitu

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa matriks R yang tidak semuanya nol ada dua baris yang menunjukan bahwa banyaknya anggota basis ruang baris maupun ruang kolom adalah dua, sehingga dimensi ruang baris sama dengan dimensi ruang kolom yaitu dua, dengan kata lain rank(A)=2.

Sesuai dengan torema diatas, yaitu Teorema 5.6.3 bahwa rank dari suatu matiks sama dengan rank matriks transpose. Terlihat bahwa hasil OBE dari A dan OBE dari A^T mempunyai rank yang sama.

Selanjutnya untuk menunjukan bahwa nullitas dari matriks diatas, persamaan padanannya adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

atau

$$\begin{aligned} x_1 + 1x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

dengan mengambil

$$x_6 = p, \qquad x_5 = q, \qquad x_4 = r, \qquad x_3 = s$$

maka didapat

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-2r-q-p \\ -2r-3q \\ s \\ r \\ q \\ p \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

terdapat empat parameter, sehingga sesuai dengan Teorema 5.6.5, dimensi dari ruang kosong adalah empat atau null(A)=4. Terlihat pula sesuai dengan Teorema 5.6.4, bahwa

$$rank(A) + null(A) = 2 + 4 = 6 \qquad \diamondsuit$$

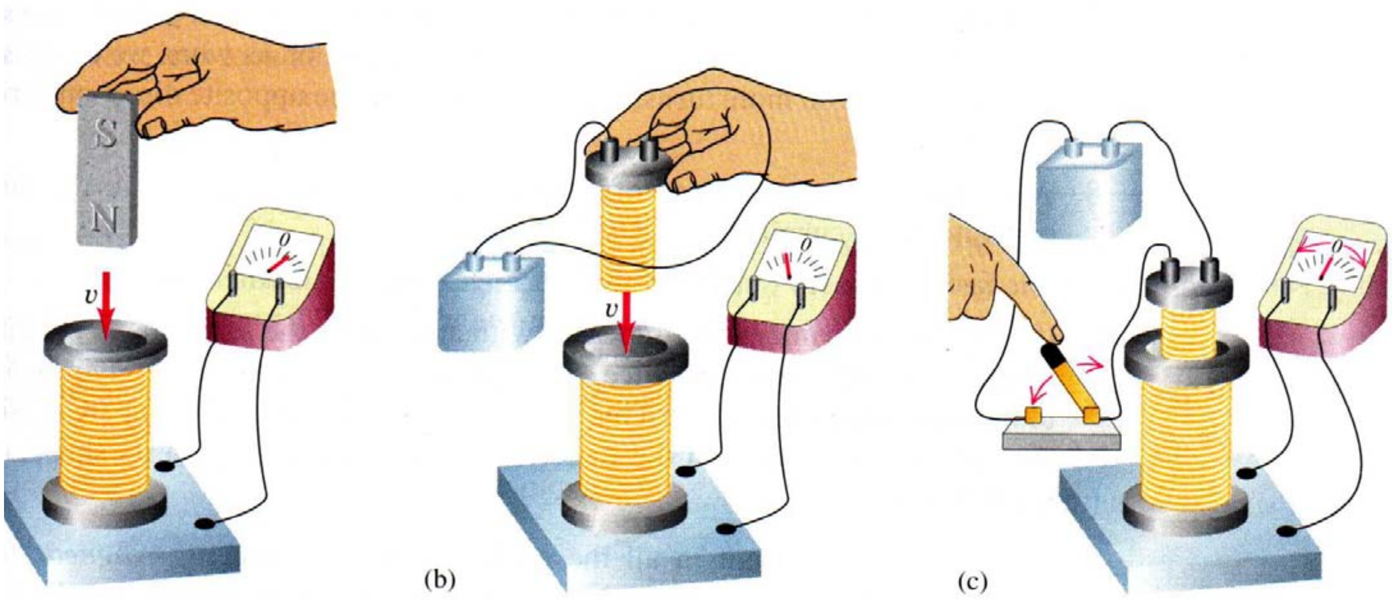
Daftar Pustaka

[1] Howard Anton, 2000, Dasar-Dasar Aljabar Linear, Interaksara, Batam.

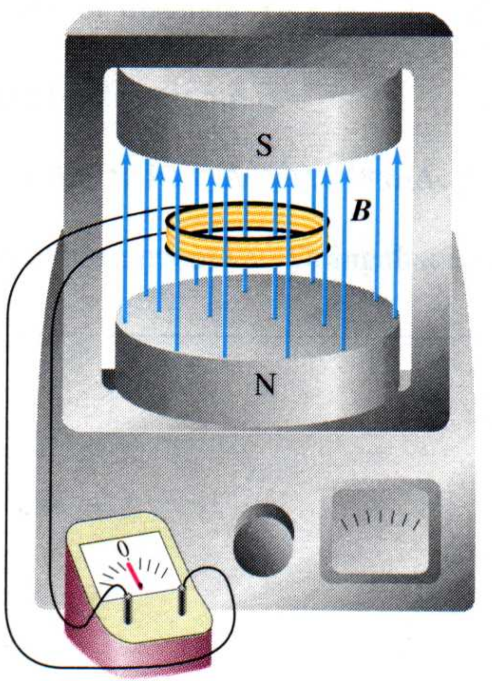
[2] Steven J. Leon, 2001, Aljabar Linear dan Aplikasinya, Erlangga, Jakarta.

GGL IMBAS

Fenomena GGL induksi



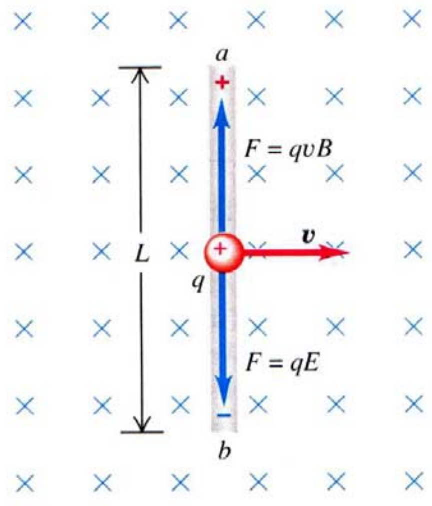
Hasil Observasi



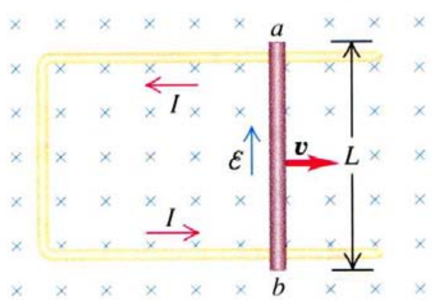
- Jika elektromagnet mati, **B**=0 dan galvanometer tidak menunjukkan adanya arus
- Jika elektromagnet dihidupkan
  - Ada arus selama B bertambah
  - arus kembali menjadi nol jika B nilainya tetap, tidak peduli berapa pun besarnya B
  - Jika koil dirubah sehingga berkurang luasnya, meter mengamati adanya arus selama perubahan. Jika dikembalikan pada bentuk semulanya, ada arus yang arahnya berlawanan dari arah arus bila luasnya bertambah.
  - Jika koil diputar dideteksi adanya arus dengan arah yang sama dengan jika luas koil dikurangi. Jika dirotasikan kembali ke posisi semula, maka arus mengalir dengan arah terbalik
  - Jika Jika koil ditarik keluar dari medan, maka ada arus yang arahnya sama seperti arah bila luas koil dikurangi.
- Jika elektromagnet dimatikan, ada arus sesaat yang arahnya kebalikan dari arah bila dihidupkan.
- Makin cepat perubahan ini dilakukan makin besar arusnya.

Unsur yang sama dalam eksperimen ini adalah perubahan fluk magnetik yang menembus koil ϕ_B.

GGL oleh Konduktor yang Bergerak dalam Medan Magnet



(a)



(b)

Partikel bermuatan q mengalami gaya magnetik Gerak partikel akan menghasilkan kelebihan muatan + di b dan muatan - di a, yang akan menimbulkan medan listrik E yang arahnya dari a ke b. Medan listrik ini akan mengerjakan gaya kebawah sebesar qE Pada keadaan setimbang qE=qvB, beda potensial a-b

$$V_{ab} = EL = vBL$$

Jika ujung a-b dihubungkan dengan konduktor U, maka akan mengalir arus induksi I dari a ke b. Ggl induksi

$$\varepsilon_{ind} = V_{ab} = \frac{dx}{dt} LB = \frac{dA}{dt} B = \frac{d\phi}{dt}$$

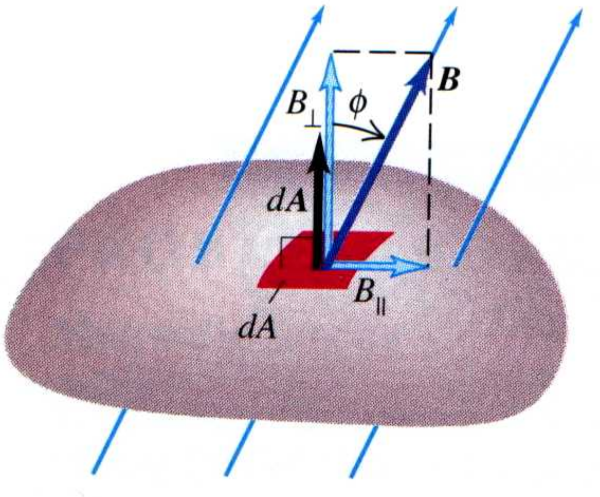
Hukum Faraday

Gaya gerak listrik yang diimbaskan dalam suatu rangkaian sama dengan negatif dari laju perubahan fluks magnetik yang menembusnya.

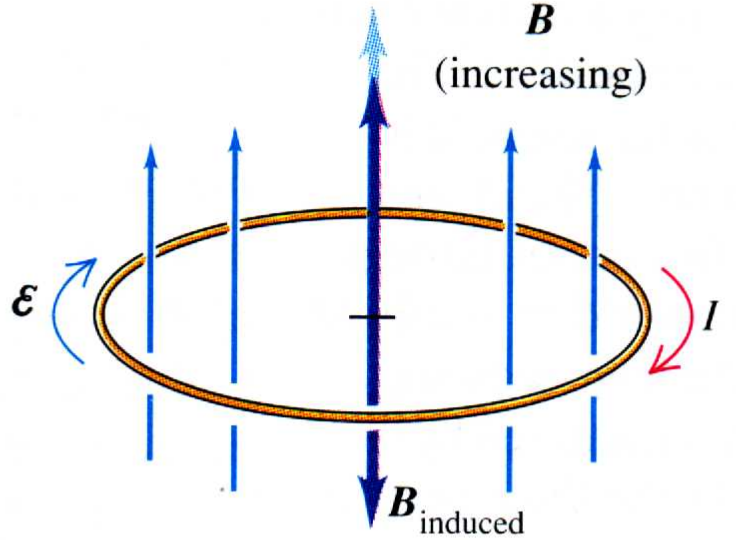
$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} \quad atau \quad \varepsilon_{ind} = -N\frac{d\phi}{dt} \ (untuk\ N\ lili\,\mathrm{tan})$$

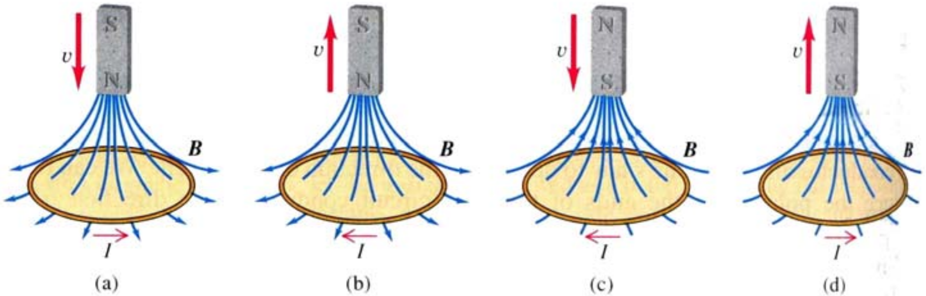
Definisi fluks magnetik ϕ

$$\phi_B = \int \vec{B}.d\vec{A}$$



Arah GGL Induksi

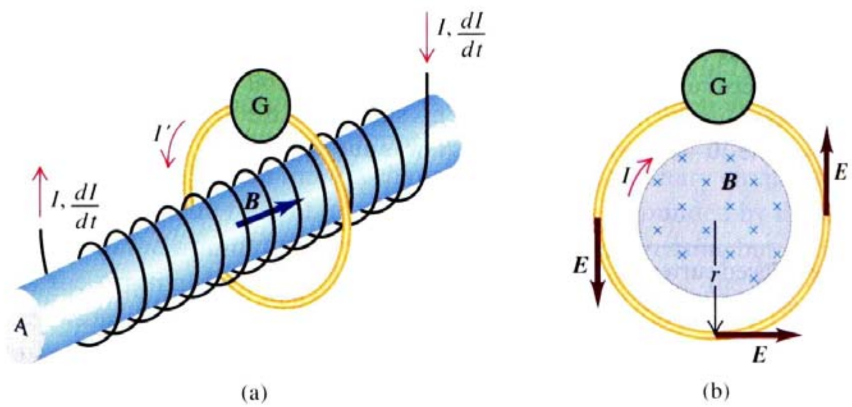




Hukum Lenz menentukan arah GGL atau arus induksi.

"Arah GGL induksi adalah sedemikian rupa sehingga melawan penyebab yang menimbulkan GGL imbas tersebut"

Medan Listrik yang Ditimbulkan oleh Perubahan Fluks Magnetik



Fluks magnetik yang menembus loop

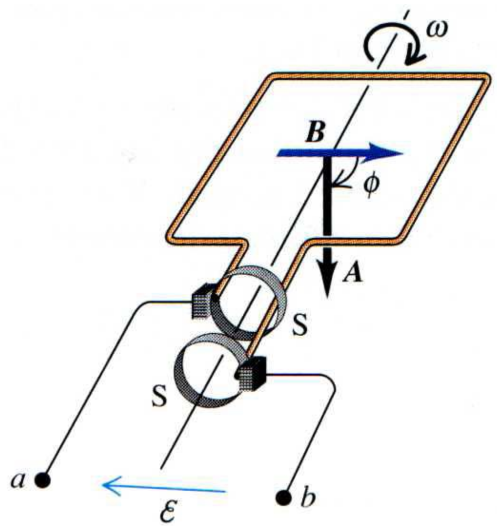
$$\phi_B = \int \vec{B}.d\vec{A} = BA = \mu_0 nIA$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\mu_0 nA\frac{dI}{dt} \quad dan \quad \oint \vec{E}.d\vec{l} = \varepsilon$$

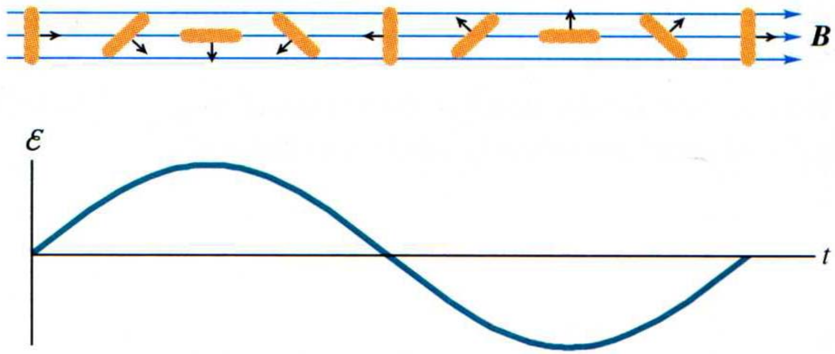
$$Jadi \quad \oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = 2\pi rE \quad sehingga \quad E = \frac{1}{2\pi r}\left|\frac{d\phi_B}{dt}\right|$$

Aplikasi GGL Imbas: Generator Arus AC



(a)

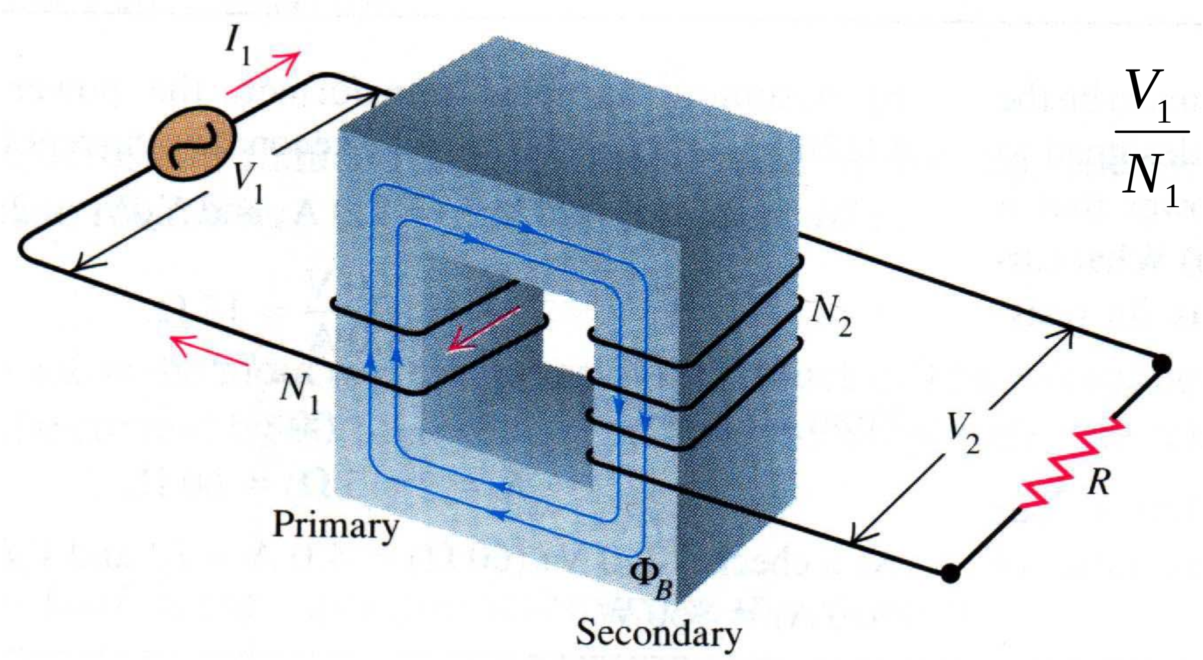


(b)

$$\Phi_B = BA\cos\phi = BA\cos\omega t$$

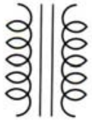
$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NBA\frac{d(\cos\omega t)}{dt}$$
$$= NAB\omega\sin\omega t = \varepsilon_{maks}\sin\omega t$$

Prinsip Kerja Transformator



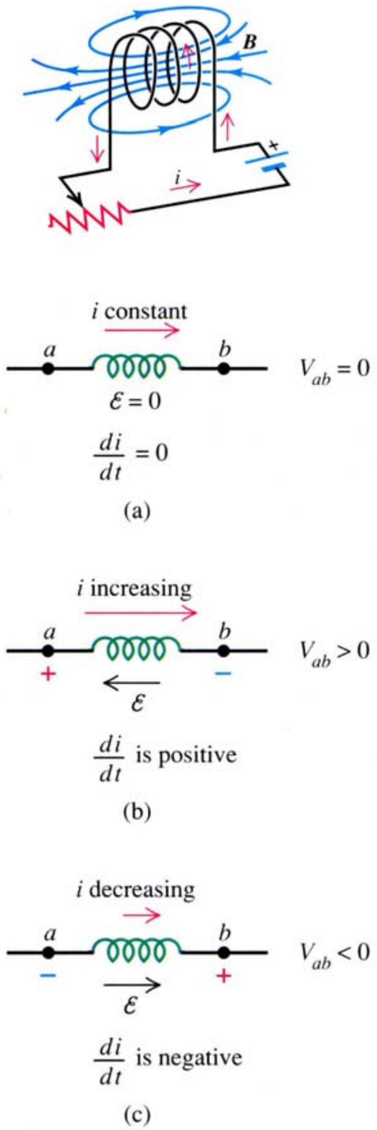
$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

simbol



INDUKTANSI

Induktansi Diri L



$$\varepsilon_{ind} = -N\frac{d\Phi}{dt} \quad dan \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{di}\frac{di}{dt}$$

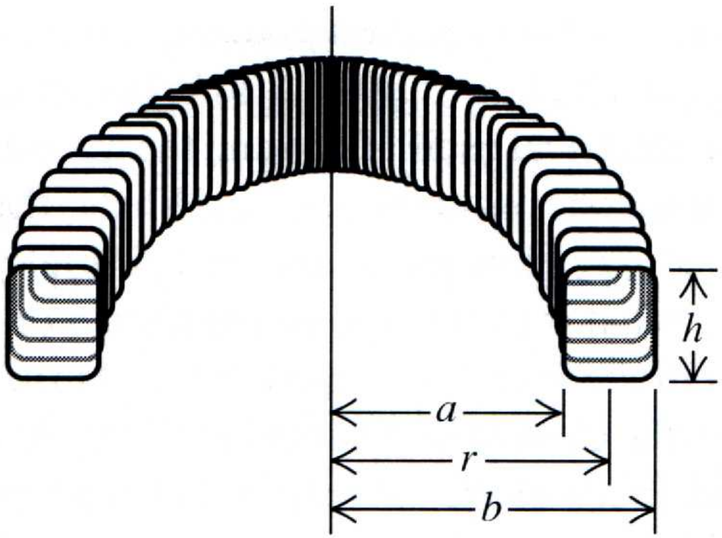
Karena Φ *berbanding lurus dengan i, maka*

$$\frac{d\Phi}{di} = konst = \frac{\Phi}{i}$$

$$\varepsilon_{ind} = -N\frac{\Phi}{i}\frac{di}{dt}$$

$$= -L\frac{di}{dt} \qquad dan \quad L = N\frac{\Phi}{i}$$

Induktansi dari Toroida



Hukum Ampere

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r}$$

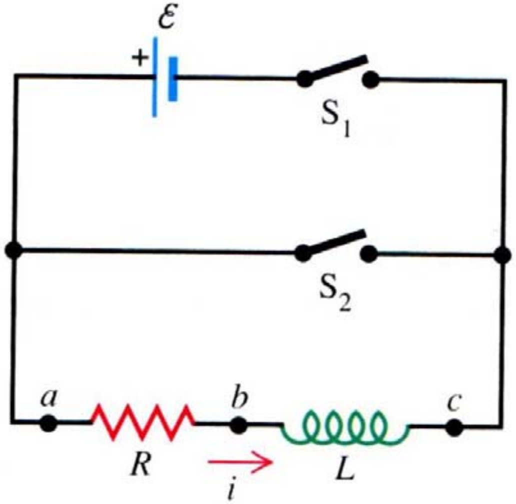
Fluks untuk cross section toroida

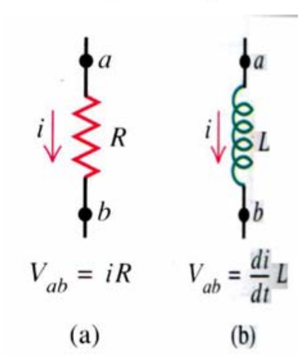
$$\phi_B = \int \vec{B}.d\vec{A} = \int_a^b (B)(hdr) = \int_a^b \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r} hdr$$

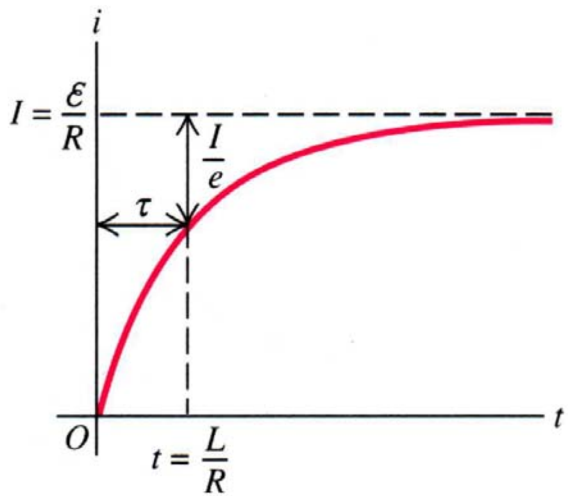
$$= \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0 i_0 N^2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

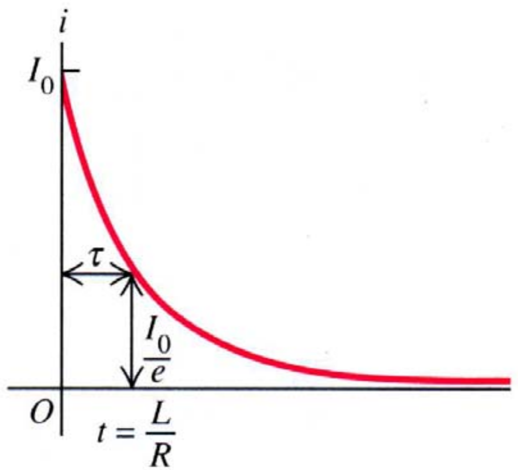
Rangkaian RL







ketika S_1 ditutup



ketika S_2 ditutup

Hukum Kirchoff loop ketika S1 ditutup

$$\varepsilon - L\frac{di}{dt} = iR$$

Solusi

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right] = \frac{\varepsilon}{R}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \qquad \tau = tetapan\ waktu$$

Hukum Kirchoff loop ketika S1 dibuka dan S2 ditutup

$$-L\frac{di}{dt} = iR \quad atau \quad iR + L\frac{di}{dt} = 0$$

Solusi

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

Energi dalam Medan Magnet

Hukum Kirchoff untuk rangkaian seri ε, R, dan L

$$\varepsilon = L\frac{di}{dt} + iR$$

Jika dikalikan dengan arus, diperoleh persamaan daya

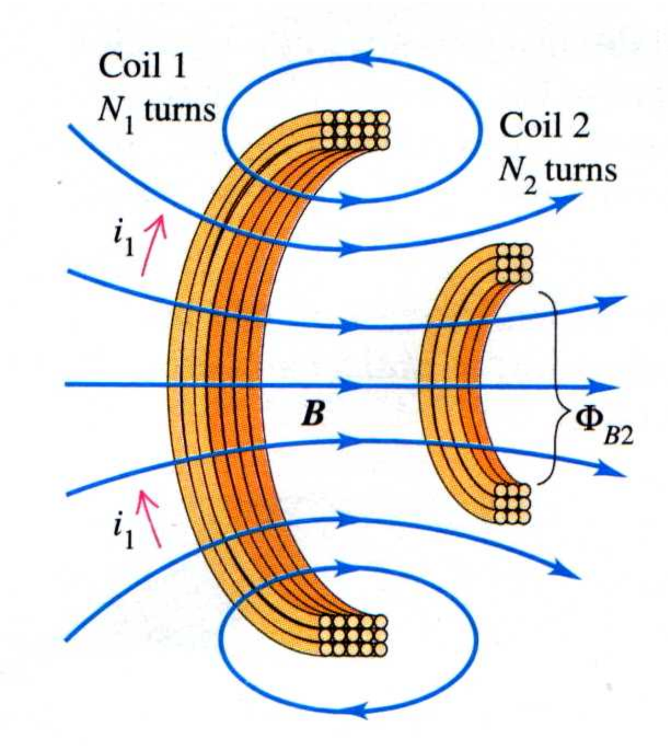
$$\varepsilon i = Li\frac{di}{dt} + i^2 R$$

Daya yang tersimpan dalam induktor $Li\frac{di}{dt} = \frac{dU_m}{dt}$

Energi yang tersimpan dalam induktor

$$U_m = \frac{1}{2}Li^2 \quad atau \quad u_m = \frac{U_m}{Vol} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

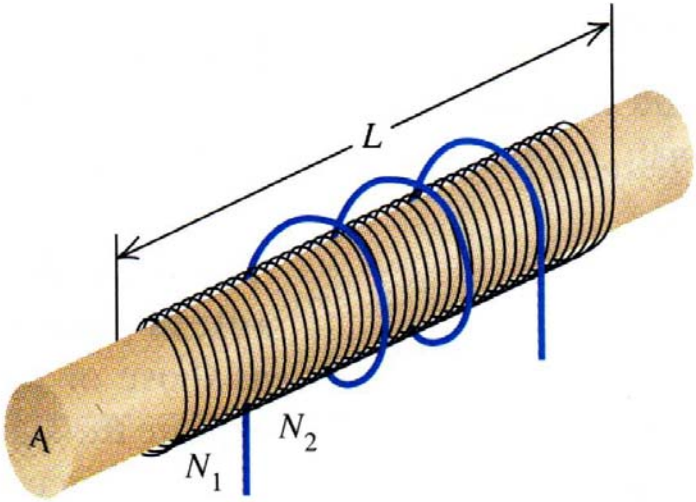
Induktansi Timbal Balik



$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$

Contoh



$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} = \mu_0 \frac{N}{L} N_1 N_2$$